Vecteurs et composantes : Solutions

1. Dans le plan cartésien, on donne les points $A\left(-4,\frac{1}{2}\right)$, $B\left(3,-\frac{1}{3}\right)$, $C\left(-\frac{1}{2},0\right)$ et $D\,(-3,-2)$

   (a) Calculer les composantes de

      i. $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

      ii. $-\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

      iii. $2\overrightarrow{BD} = 2\begin{pmatrix} -6 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$

      iv. $\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$ → cf iii

      $= \begin{pmatrix} -11 \\ -\frac{35}{6} \end{pmatrix}$

      v. $\frac{2}{3}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$

      cf i ← $= \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ → cf iv

      $= \begin{pmatrix} -\frac{14}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$

      $= \begin{pmatrix} -\frac{17}{6} \\ \frac{19}{12} \end{pmatrix}$

(b) Déterminer les coordonnées de X et Y tels que

i. $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ $\quad X(x,y)$

cf(a)i $\quad$ cf(a)ii

$$\begin{pmatrix} x+4 \\ y-\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ -\frac{5}{18} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+4 = \frac{7}{6} \\ y - \frac{1}{2} = -\frac{5}{18} \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{17}{6} \\ y = \frac{4}{18} \end{cases} \Rightarrow X : \left(-\frac{17}{6}, \frac{2}{9}\right)$$

ii. $\overrightarrow{CY} = -2\overrightarrow{BD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} - \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$ $\quad Y(x,y)$

$$\begin{pmatrix} x+\frac{1}{2} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

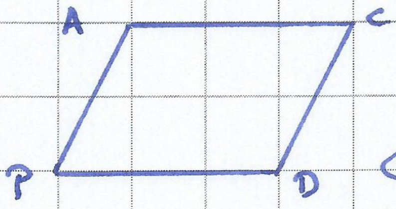
cf(a)

$$= \begin{pmatrix} 12 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{21}{8} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{217}{24} \\ \frac{53}{12} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2} = \frac{217}{24} \\ y = \frac{53}{12} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{205}{24} \\ y = \frac{53}{12} \end{cases} \Rightarrow Y : \left(\frac{205}{24}, \frac{53}{12}\right)$$

(c) Déterminer les coordonnées du point P pour que $ACDP$ soit un parallélogramme



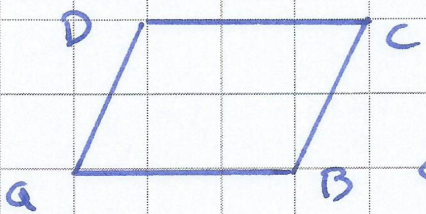
$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CD} \qquad P(x,y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+4 \\ y-\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+4 = -\frac{5}{2} \\ y-\frac{1}{2} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{13}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$P : \left(-\frac{13}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

(d) Déterminer les coordonnées du point Q pour que $DCBQ$ soit un parallélogramme



$$\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{CB} \qquad Q(x,y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+3 \\ y+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+3 = \frac{7}{2} \\ y+2 = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{7}{3} \end{cases}$$

$$Q : \left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{3}\right)$$

(e) Déterminer les coordonnées du point M milieu de $[AB]$

$$M : \left(\frac{-4+3}{2}, \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{12}\right)$$

2. Déterminer la valeur de a pour que $\vec{x}$ soit parallèle à $\vec{y}$ si

(a) $\vec{x}(2, a)$ et $\vec{y}(10, 30)$

$$\frac{2}{10} = \frac{a}{30} \iff \frac{60}{10} = a \iff a = 6$$

(b) $\vec{x}(2, a)$ et $\vec{y}(a, 4)$

$$\frac{2}{a} = \frac{a}{4} \iff a^2 = 8 \iff a = \pm\sqrt{8}$$

$$\iff a = \pm 2\sqrt{2}$$

(c) $\vec{x}(a, 3)$ et $\vec{y}(a, 7)$

$$\frac{a}{a} = \frac{3}{7} \iff 7a = 3a \iff 4a = 0$$

$$\iff a = 0$$

3. On donne $A(10,3)$ et $B(-1,7)$. Déterminer les coordonnées de C pour que $6\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$

$C : (x, y)$

$$6\begin{pmatrix} x-10 \\ y-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 60 = -11 \\ 6y - 18 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-11+60}{6} \\ y = \frac{4+18}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow C : \left(\frac{49}{6}, \frac{11}{3}\right)$$

4. Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan et les points $A(2,3)$, $B(0,-3)$ et $C(-3,0)$

   (a) Soit E le point vérifiant $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Déterminer les coordonnées du point E;

$E(x, y)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y+3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y+3 = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -6 \end{cases} \qquad E : (-1, -6)$$

   (b) Soit F le point vérifiant $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OF}$. Déterminer les coordonnées du point F;

$F(x, y)$

$O(0, 0)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y+3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}x \\ y+3 = \frac{2}{3}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \frac{1}{3}y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -9 \end{cases} \qquad F : (0, -9)$$

   (c) Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$;

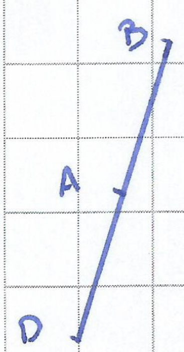
$$\overrightarrow{CE} : \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CF} : \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

   (d) En déduire que les points C, E, F sont alignés

$$\frac{2}{3} = \frac{-6}{-9} \Rightarrow \overrightarrow{CE} \parallel \overrightarrow{CF} \Rightarrow C, E, F \text{ alignés}$$

5. Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, un repère orthonormal du plan . Soient les trois points $A(1,-1)$, $B(-2,0)$, $C(-3,3)$.

(a) Soit D le symétrique de B par rapport à A. Donner les coordonnées de D ;



$D(x,y)$

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB} \iff \begin{pmatrix} 1-x \\ -1-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1-x = -3 \\ -1-y = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow D(4,-2)$$

(b) Soit le point $E(-4,6)$. Montrer que les points B, C et E sont alignées puis montrer que C est le milieu de $[BE]$.

$$\overrightarrow{BC} : \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BE} : \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{-1}{-2} = \frac{3}{6} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \,//\, \overrightarrow{BE}$$

$$\text{milieu de } [BE] : \left(\frac{-2-4}{2}, \frac{0+6}{2} \right) = (-3,3) : C$$

(c) Montrer que AC et ED sont parallèles.

$$\overrightarrow{AC} : \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{ED} : \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{-4}{8} = \frac{4}{-8} \rightarrow \overrightarrow{AC} \,//\, \overrightarrow{ED}$$

(d) Déterminer les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC.

$$G : \left(\frac{1-2-3}{3}, \frac{-1+0+3}{3} \right) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3} \right)$$