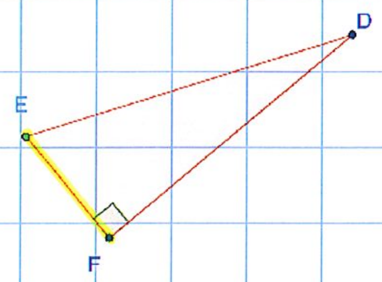
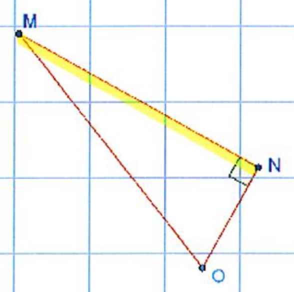
Trigonométrie dans le triangle rectangle : Solutions

1. Repasser en couleur les côtés demandés.

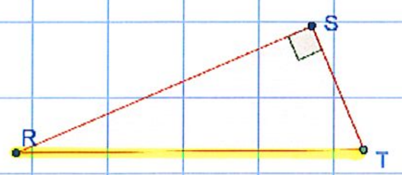
   (a) Le côté adjacent à l'angle $\widehat{DEF}$.



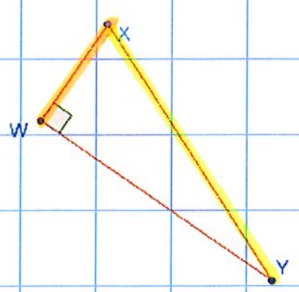
   (b) Le côté opposé à l'angle $\widehat{MON}$.



   (c) L'hypoténuse en rouge et le côté opposé à l'angle $\widehat{SRT}$ en bleu.



   (d) L'hypoténuse en rouge et le côté adjacent à l'angle $\widehat{WXY}$ en bleu.



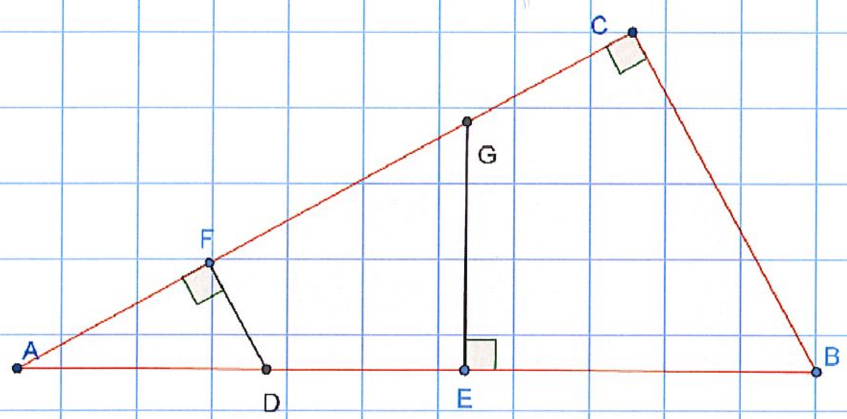
(e) L'hypoténuse en rouge et le côté adjacent à l'angle $\widehat{BAC}$ en bleu.

2. (a) Soit un triangle ABC rectangle en A.
   - L'hypoténuse est BC.
   - Le côté adjacent à l'angle $\widehat{ABC}$ est AB.
   - Le côté adjacent à l'angle $\widehat{ACB}$ est AC.

   (b) Soit DEF un triangle rectangle en E.
   - L'hypoténuse est DF.
   - Le côté opposé à l'angle $\widehat{EDF}$ est EF.
   - Le côté opposé à l'angle $\widehat{EFD}$ est DE.

   (c) GHI est un triangle rectangle en H.
   - Le côté adjacent à l'angle $\widehat{HIG}$ est HI.
   - Le côté opposé à l'angle $\widehat{HGI}$ est HI.

3. Soit les triangles suivants :



   (a) L'hypoténuse du triangle rectangle ABC est AB

   (b) L'hypoténuse du triangle rectangle AEG est AG

   (c) Dans le triangle rectangle EGA, le côté opposé à l'angle $\widehat{EGA}$ est AE

   (d) Dans le triangle rectangle FAD, le côté opposé à l'angle $\widehat{ADF}$ est AF

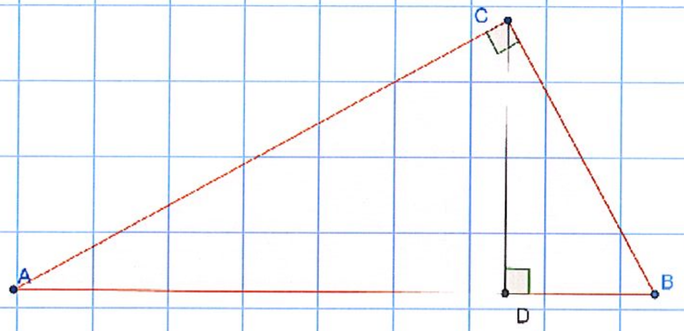
   (e) Dans le triangle rectangle AEG, le côté adjacent à l'angle $\widehat{AGE}$ est EG

   (f) Dans le triangle rectangle ADF, le côté adjacent à l'angle $\widehat{DAF}$ est AF

   (g) Dans le triangle rectangle BEG, le côté adjacent à l'angle $\widehat{EGB}$ est EG

4. MNO est un triangle rectangle en O.
   - L'hypoténuse est MN.
   - Le côté adjacent à l'angle $\widehat{MNO}$ est NO.
   - Donc $\cos \widehat{MNO} = \dfrac{NO}{MN}$

5. HKJ est un triangle rectangle en K.
   - L'hypoténuse est HJ.
   - Le côté opposé à l'angle $\widehat{HJK}$ est HK.
   - Donc $\sin\widehat{HJK} = \dfrac{HK}{HJ}$
6. RST est un triangle rectangle en S.
   - Le côté adjacent à l'angle $\widehat{SRT}$ est RS.
   - Le côté opposé à l'angle $\widehat{SRT}$ est TS.
   - Donc $\tan\widehat{SRT} = \dfrac{TS}{RS}$
7. TUV est un triangle rectangle en V.
   - L'hypoténuse est TU.
   - Le côté adjacent à l'angle $\widehat{TUV}$ est UV.
   - Le côté opposé à l'angle $\widehat{TUV}$ est TV.
   - Donc $\cos\widehat{TUV} = \dfrac{UV}{TU}$
   - Donc $\sin\widehat{TUV} = \dfrac{TV}{TU}$
   - Donc $\tan\widehat{TUV} = \dfrac{TV}{UV}$
8. En utilisant la figure ci-dessous, compléter les phrases ci-dessous.



   (a) Dans le triangle ABC rectangle en C, on a : $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{AC}{AB}$

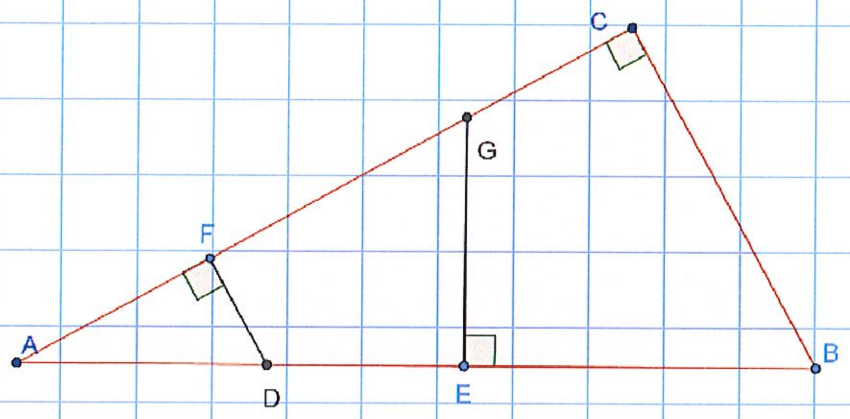
   (b) Dans le triangle ABC rectangle en C, on a : $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{BC}{AB}$

   (c) Dans le triangle BCD rectangle en D, on a : $\sin\widehat{BCD} = \dfrac{BD}{BC}$

   (d) Dans le triangle BCD rectangle en D, on a : $\tan\widehat{DBC} = \dfrac{DC}{BD}$

   (e) Dans le triangle ADC rectangle en D, on a : $\sin\widehat{ACD} = \dfrac{AD}{AC}$

9. Soit les triangles suivants :



(a) Dans le triangle ABC rectangle en C, on a :$\sin\widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AB}$

(b) Dans le triangle FDA rectangle en F, on a :$\sin\widehat{FDA} = \dfrac{FA}{DA}$

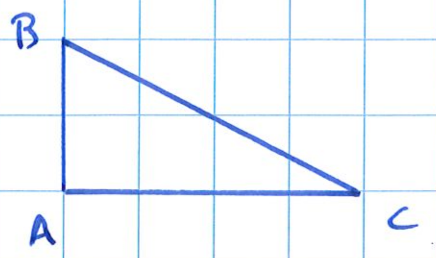
(c) Dans le triangle BEG rectangle en E, on a : $\cos\widehat{EGB} = \dfrac{EG}{BG}$

(d) Dans le triangle BEG rectangle en E, on a : $\sin\widehat{EBG} = \dfrac{EG}{BG}$

(e) Dans le triangle ADF rectangle en F, on a :$\sin\widehat{FAD} = \cos\widehat{ADF} = \dfrac{FD}{AD}$

10. Soit un triangle ABC rectangle en A. Calculer les nombres trigonométriques de $\hat{B}$ et $\hat{C}$ si :

(a) $AB = 3$ et $AC = 4$



$$BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\cos \hat{B} = \sin \hat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$$

$$\sin \hat{B} = \cos \hat{C} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}$$

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{3}$$

$$\tan \hat{C} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$$

(b) $AB = 2$ et $BC = 6$

$$AC = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\cos \hat{B} = \sin \hat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

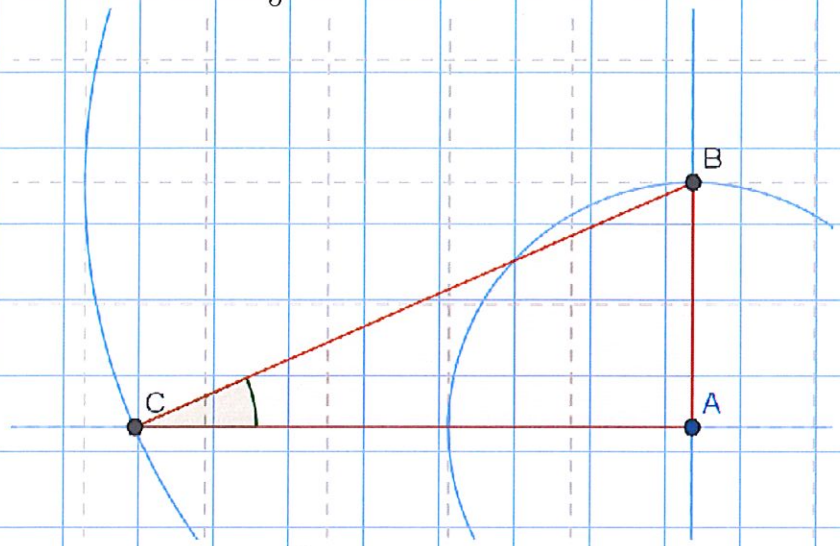
$$\sin \hat{B} = \cos \hat{C} = \frac{AC}{BC} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

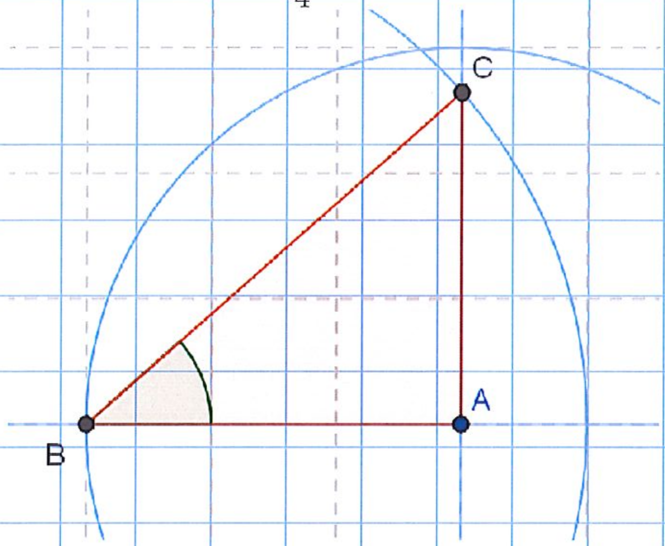
$$\tan \hat{C} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

11. A l'aide d'une latte et d'un compas, tracer trois angles :

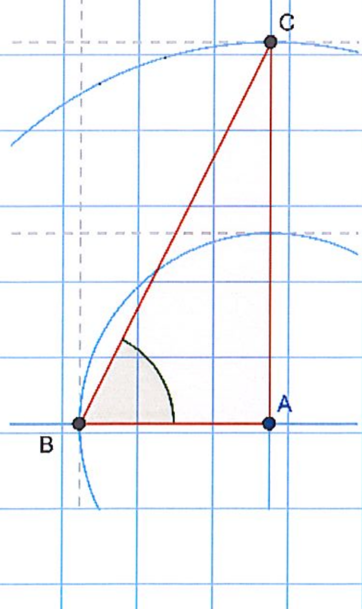
(a) dont le sinus vaut $\dfrac{2}{5}$



(b) dont le cosinus vaut $\dfrac{3}{4}$

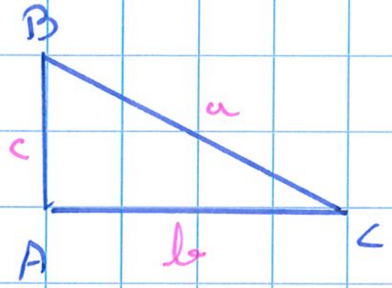


(c) dont la tangente vaut 2



12. Soit un triangle ABC rectangle en A. Compléter le tableau suivant, en valeur exacte[1] :

	cas 1	cas2	cas3	cas4
a	5	10	10	$8\sqrt{5}$
b	3	5	$\sqrt{91}$	16
c	4	$5\sqrt{3}$	3	8
$\sin B$	$\frac{3}{5}$	0.5	$\frac{\sqrt{91}}{10}$	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$
$\cos B$	$\frac{4}{5}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.3	$\frac{\sqrt{5}}{5}$
$\tan B$	$\frac{3}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{91}}{3}$	2
$\sin C$	$\frac{4}{5}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.3	$\frac{\sqrt{5}}{5}$
$\cos C$	$\frac{3}{5}$	0.5	$\frac{\sqrt{91}}{10}$	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$
$\tan C$	$\frac{4}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{3\sqrt{91}}{91}$	$\frac{1}{2}$



<u>cas 1</u>

$$a = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\sin \hat{B} = \cos \hat{C} = \frac{b}{a} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \hat{B} = \sin \hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$

$$\tan \hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{3}{4}$$

$$\tan \hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{4}{3}$$

Les autres cas se résolvent de la m̂ manière

1. Pour rappel :
   - Une valeur exacte contient des radicaux et des fractions réduites et rationnalisées ;
   - Une valeur approchée est un chiffre décimal.

En matémathique, on travail toujours en ***valeur exacte***.

13. A l'aide de la calculatrice, calculer les valeurs, arrondies au centième, du cosinus, du sinus et de la tangente des angles donnés.

Angle	30°	45°	20°	83°	60°
Cosinus	0,87	0,71	0,94	0,12	0,5
Sinus	0,5	0,71	0,34	0,99	0,87
Tangente	0,58	1	0,36	8,14	1,73

14. A l'aide de la calculatrice, calculer la valeur arrondie au degré de la mesure des angles.

Cosinus	0,2	0,58	0,9
Angle	78°	55°	26°

Sinus	0,3	0,65	1,3
Angle	17°	41°	Imp.

Tangente	0,8	1,23	3,92
Angle	39°	51°	76°

15. ABC est un triangle rectangle en A, AB=5 cm et $\widehat{BCA} = 35°$. On veut calculer la longueur BC.

   (a) Dessiner le triangle, repasser en couleur la longueur connue et la longueur que l'on cherche puis compléter.
   - $[BC]$ est l'hypoténuse,
   - $[BA]$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{BCA}$,
   - on utilise donc le sinus de l'angle $\widehat{BCA}$.

   (b) Calcul de BC. Dans le triangle ABC rectangle en A, on a :
   $\sin\widehat{BCA} = \dfrac{\text{côté opposé à } \widehat{BCA}}{\text{hypotnéuse}}$
   donc $\sin\widehat{BCA} = \dfrac{BA}{BC}$
   Donc $BC = \dfrac{BA}{\sin\widehat{BCA}}$ A l'aide de la calculatrice, on en déduit la longueur BC arrondie au millimètre : $BC \approx 8,7$ cm.

16. MNP est un triangle rectangle en M tel que PN=5,4 cm et $\widehat{MPN}$= 42°. On veut calculer la longueur MP.

   (a) Dessiner le triangle, repasser en couleur la longueur connue et la longueur que l'on cherche puis compléter.
   - $[PN]$ est l'hypoténuse,
   - $[MP]$ est le côté adjacent à l'angle $\widehat{MPN}$,
   - on utilise donc le cosinus de l'angle $\widehat{MPN}$.

   (b) Calcul de MP. Dans le triangle MNP rectangle en M, on a :
   $\cos\widehat{MPN} = \dfrac{\text{côté adjacent à } \widehat{MPN}}{\text{hypoténuse}}$
   donc $\cos\widehat{MPN} = \dfrac{MP}{PN}$
   Donc $MP = PN.\cos\widehat{MPN}$ A l'aide de la calculatrice, on en déduit la longueur MP arrondie au millimètre : $MP \approx 4$ cm.

17. RST est un triangle rectangle en S tel que RS=4 cm et ST=7 cm. On veut calculer l'angle $\widehat{SRT}$.

(a) Dessiner le triangle, repasser en couleur la longueur connue et la longueur que l'on cherche puis complèter.

- $[RS]$ le côté adjacent est à l'angle $\widehat{SRT}$,
- $[ST]$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{SRT}$,
- on utilise donc la tangente de l'angle $\widehat{SRT}$.

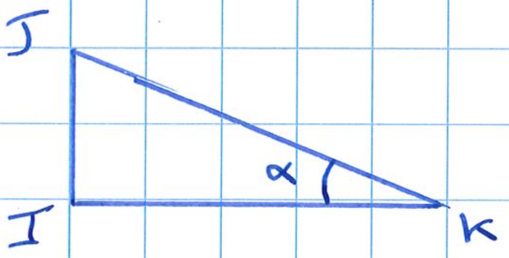
(b) Calcul de l'angle $\widehat{SRT}$. Dans le triangle RST rectangle en S, on a :

$$\tan\widehat{SRT} = \frac{\text{le côté opposé à l'angle } \widehat{SRT}}{\text{le côté adjacent à l'angle } \widehat{SRT}}$$

donc $\tan\widehat{SRT} = \frac{ST}{RS} = \frac{7}{4}$.

A l'aide de la calculatrice, on en déduit une mesure de l'angle $\widehat{SRT}$ arrondie au degré : $\widehat{SRT} \approx 60°$.

18. IJK est un triangle rectangle en I tel que IJ = 3,2 cm et JK = 5,3 cm. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{IKJ}$ arrondie au degré.



inconnu : α

connu : IJ (opp à α)

JK (hyp)

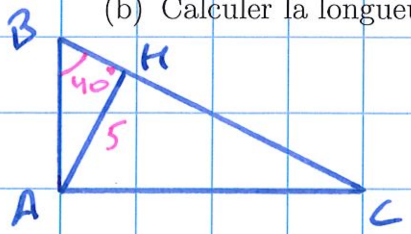
→ SOH $\quad \sin\alpha = \frac{IJ}{JK}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{3,2}{5,3} = 0,604 \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}(0,604) \simeq 37°$

19. ABC est un triangle rectangle en A, H est le pied de la hauteur issue de A, AH = 5 cm ; $\widehat{ABC} = 40°$.

(a) Calculer la longueur AB arrondie au dixième.

(b) Calculer la longueur BC arrondie au dixième.



a) Δ ABH :

inconnu : AB (hyp)

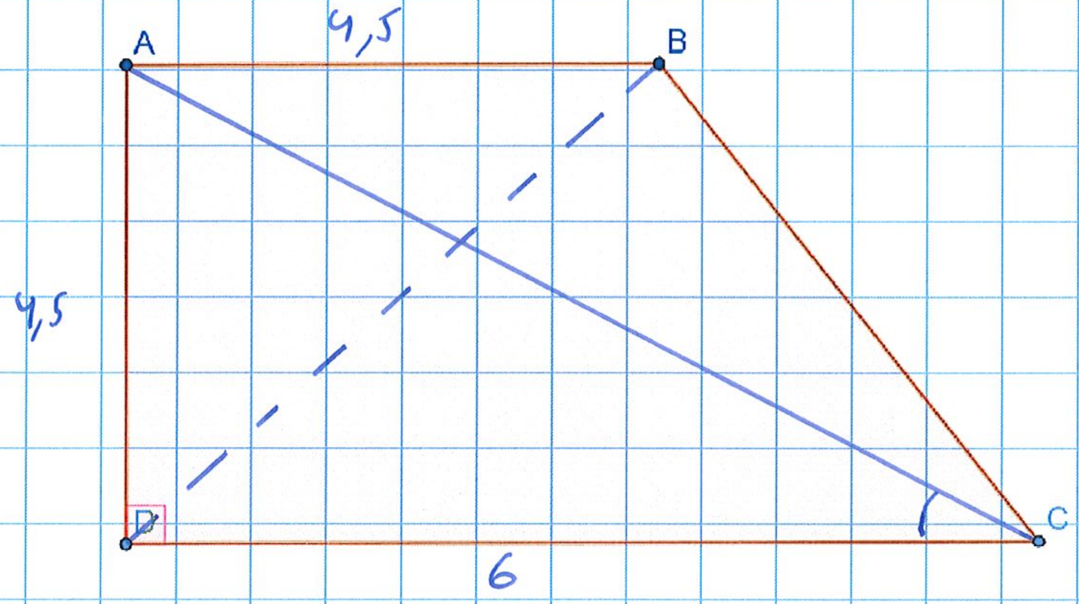
connu : AH (opp à $\widehat{ABC}$), $\widehat{ABC}$

$\sin\widehat{ABC} = \frac{5}{AB} \iff AB = \frac{5}{\sin\widehat{ABC}} \simeq 7,8$ cm

b) BC = hyp de Δ ABC

$\cos 40° = \frac{AB}{BC} \iff BC = \frac{AB}{\cos 40°} \simeq 10,2$ cm

20. $ABCD$ est un trapèze rectangle de bases $[AB]$ et $[CD]$ tel que $AB = AD = 4{,}5$ cm et $DC = 6$ cm.



(a) Calcule la mesure de l'angle $\widehat{ACD}$ arrondie au degré.

(b) Calcule la longueur de la diagonale $[AC]$ arrondie au millimètre.

(c) Quelle est la nature du triangle ABD ? Justifie.

(d) Calcule la longueur BD arrondie au millimètre.

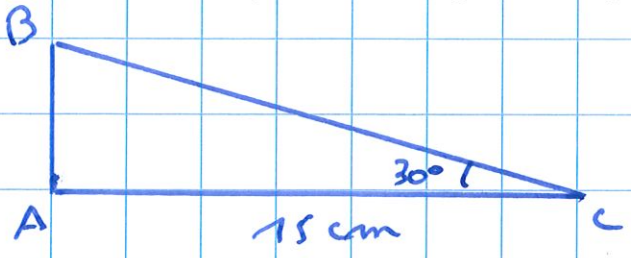
a) $\tan \hat{ACD} = \frac{4{,}5}{6} \Leftrightarrow \hat{ACD} \simeq 37°$

b) $AC = \sqrt{4{,}5^2 + 6^2} \simeq 7{,}5$ cm

c) isocèle car $AB = AD$

d) $BD = \sqrt{4{,}5^2 + 4{,}5^2} = 4{,}5\sqrt{2} \simeq 6{,}4$ cm

21. Luc a construit un plan incliné de 30° dont la base mesure 15 cm de long pour propulser des billes. Quelle est la longueur de la pente ? Donner l'arrondi au millimètre.



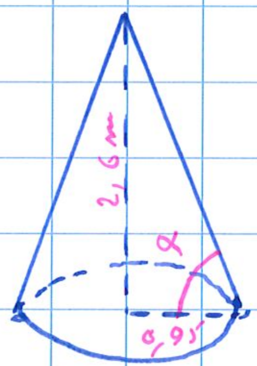
inc : BC (hyp)

connu : $B\hat{C}A$ et AC (adj)

CAH

$\cos B\hat{C}A = \dfrac{AC}{BC} \Leftrightarrow BC = \dfrac{AC}{\cos B\hat{C}A} \simeq 17,3$ cm

22. Dans la nuit, un lampadaire de 2,60 m de haut, dessine sur le sol un disque de 95 cm de rayon.
Quelle est la mesure de l'angle, arrondie au degré, formé par le cône de lumière avec le sol ?

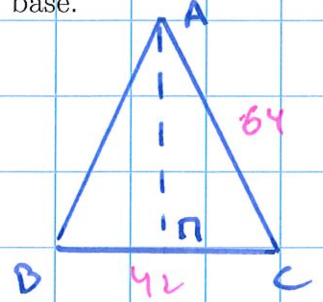


inc : α

connu : 0,95 (= adj)
2,6 (= opp)
} TOA

$\tan \alpha = \dfrac{2,6}{0,95} \simeq 2,737 \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(2,737)$
$\simeq 70°$

23. La base d'un triangle isocèle ABC mesure 42 cm, les côtés égaux mesurent 64cm. Calculer les angles de ce triangle ainsi que la longueur de la hauteur relative à la base.



$\hat{B} = \hat{C}$

Dans ΔABM, $AB = 64$ et (hyp)

$BM = 21$ (adj à $\hat{B}$) $\rightarrow$ CAH

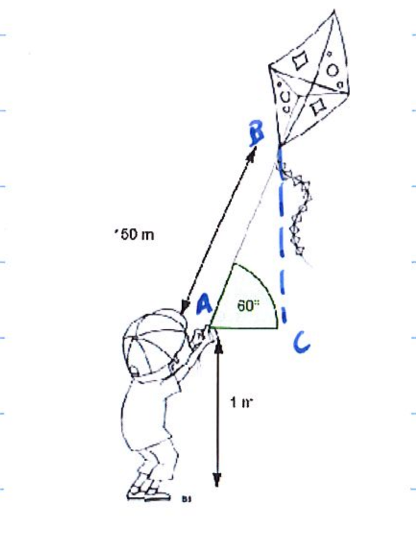
$\cos \hat{B} = \dfrac{BM}{AB} = \dfrac{21}{64} \simeq 0{,}328$

$\Rightarrow \hat{B} = \cos^{-1}(0{,}328) \simeq 70{,}84°$

$\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C}) = 180° - 2\hat{B} = 38{,}31°$

$AM = \sqrt{64^2 - 21^2} \simeq 60{,}46$ cm

24. Une personne manoeuvrant un cerf-volant tient le fil à 1 mètre au dessus du niveau du sol. Le fil est tendu et forme en angle de 60° avec l'horizontale. Calculer l'altitude du cerf volant si on laisse dérouler 150 mètres de fil.



ΔABC : connu $B\hat{A}C$ et

AB (hyp)

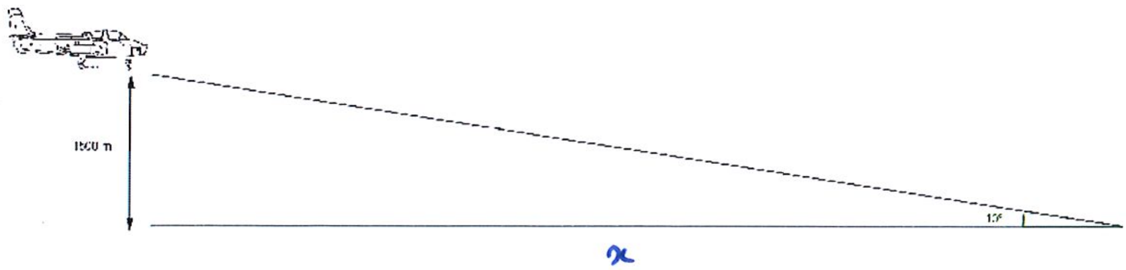
inc : BC (opp) $\rightarrow$ SOH

$\sin 60° = \dfrac{BC}{AB} \Leftrightarrow BC = AB \sin 60°$

$\simeq 129{,}9$ m

$\Rightarrow h = 129{,}9$ m $+ 1$ m $= 130{,}9$ m

25. Un avion volant à 1500m. d'altitude désire aborder une piste d'atterrissage sous un angle de 10°. Calculer la distance horizontale entre l'avion et la piste au moment où il amorce la descente.

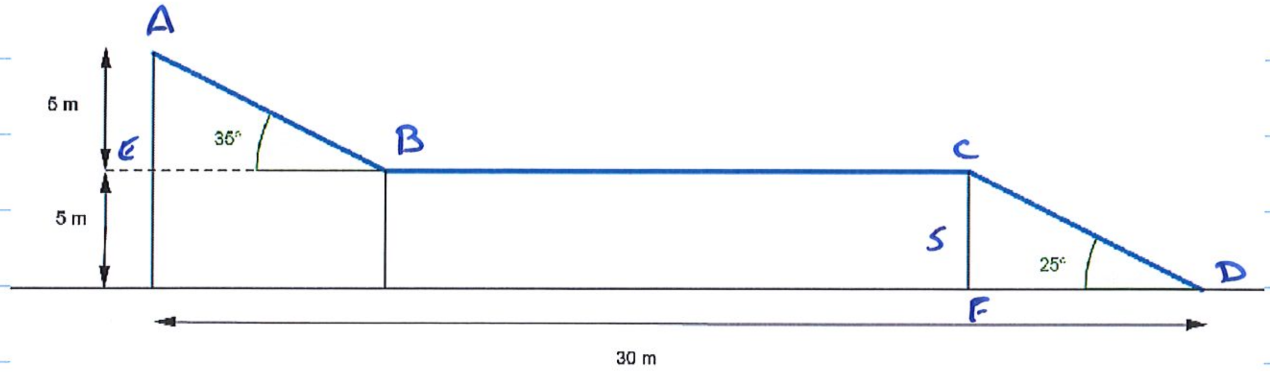


Connu : α, opp
inc : x (adj)
} TOA

$$\tan 10^\circ = \frac{1500}{x} \iff x = \frac{1500}{\tan 10}$$

$$\simeq 8507\,m$$

26. La figure ci-dessous représente une partie de toboggan d'une piscine. Trouver la longueur totale du toboggan.



• AB : SOH → $\sin 35° = \frac{AE}{AB} \iff AB = \frac{AE}{\sin 35°}$

$\simeq 8,72$ m

• CD : SOH → $\sin 25° = \frac{CF}{CD} \iff CD = \frac{CF}{\sin 25°}$

$\simeq 11,83$ m

• $BC = 30 - BE - DF$

* BE : TOA $\tan 35° = \frac{5}{BE} \iff BE = \frac{5}{\tan 35°}$

$\simeq 7,14$ m

* DF : TOA $\tan 25° = \frac{5}{DF} \iff DF = \frac{5}{\tan 25°}$

$\simeq 10,72$ m

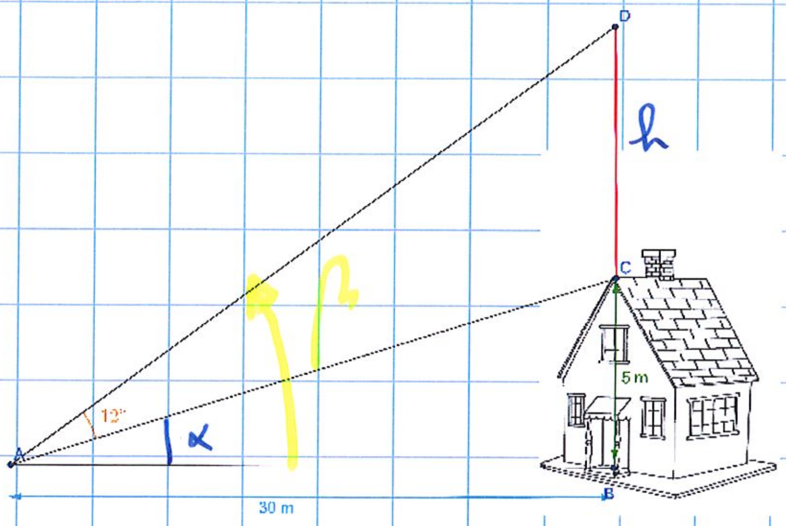
$\Rightarrow BC \simeq 12,14$

• $L = AB + BC + CD$

$= 8,72 + 12,14 + 11,83$

$= 32,69$ m

27. Une antenne est située sur le toit d'un garage haut de 5m. A partir d'un point au sol distant de 30m d'un point situé à la verticale de l'antenne, on voit l'antenne sous un angle de 12°. Trouver la hauteur de l'antenne.



Dans Δ ABC : $\tan \alpha = \dfrac{5}{30}$ (TOA)

$= \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{6}\right)$

$\simeq 9,46°$

$\Rightarrow \beta = 21,46°$

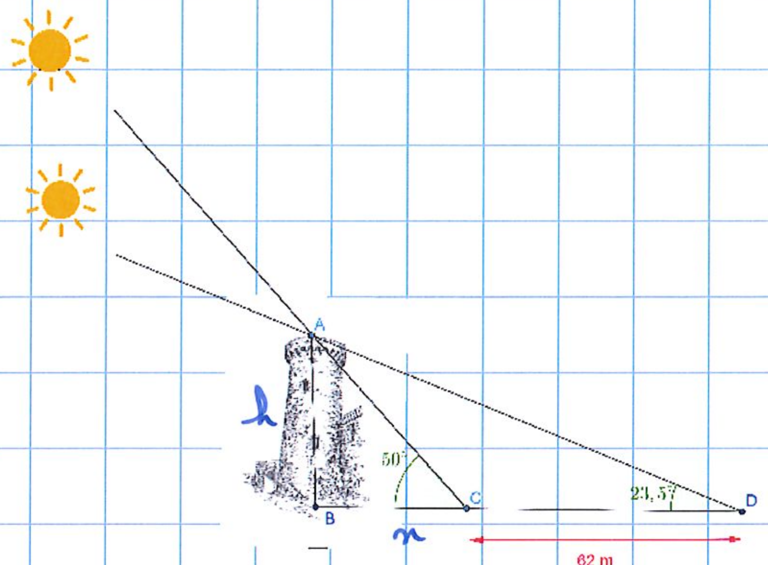
Dans Δ ABD : $\tan 21,46° = \dfrac{5+h}{30}$

$\Leftrightarrow 5 + h = 30 \cdot \tan 21,46°$

$\Leftrightarrow h = 30 \tan 21,46° - 5$

$\simeq 6,79$ m

28. Trouver la hauteur d'une tour sachant que son ombre s'allonge de 62m lorsque l'élévation du soleil au dessus de l'horizon passse de 50° à 23.5°.



Dans ABC : $\tan 50° = \dfrac{h}{x}$

Dans ABD : $\tan 23{,}5 = \dfrac{h}{x+62}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h = x \tan 50° \\ \tan 23{,}5° = \dfrac{x \tan 50°}{x+62°} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ (x+62)\tan 23{,}5° = x \tan 50° \quad (*) \end{cases}$$

$(*)\ x \tan 23{,}5° + 62 \tan 23{,}5° = x \tan 50°$

$\Leftrightarrow 62 \tan 23{,}5° = x \tan 50° - x \tan 23{,}5°$

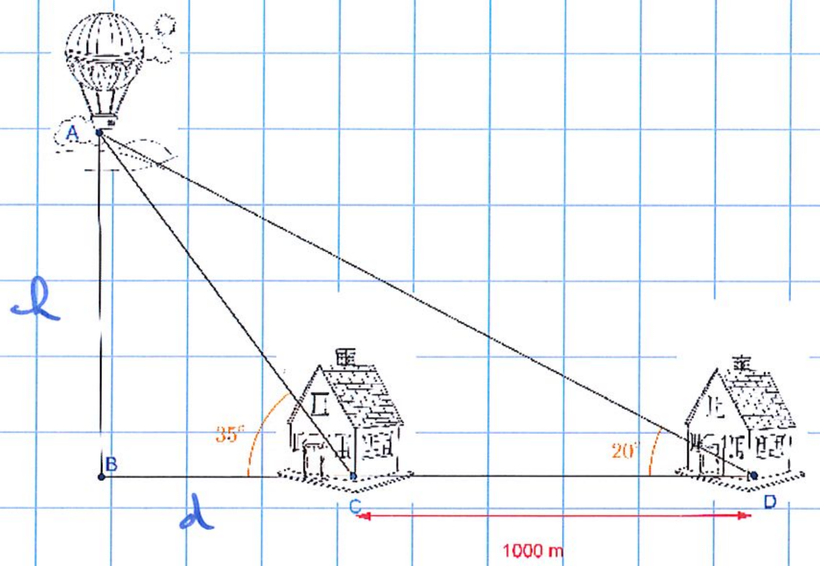
$\Leftrightarrow 62 \tan 23{,}5° = x(\tan 50° - \tan 23{,}5°)$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{62 \tan 23{,}5°}{\tan 50° - \tan 23{,}5°}$

$\Leftrightarrow x \simeq 35{,}61\,m$

$(1) \Leftrightarrow h = 42{,}44\,m$

29. D'un ballon dirigeable, on observe deux maisons placées dans la même direction mais dont l'une est éloignée de l'autre de 1km. Les deux rayons visuels forment avec l'horizon des angles de 20° et 35°. Trouver la distance de la verticale du ballon à la maison la plus proche.



? d

Dans ABC : $\tan 35° = \dfrac{l}{d}$

Dans ABD : $\tan 20° = \dfrac{l}{d+1000}$

Le système se résout comme à l'exercice 28 :

$$d = \frac{1000 \tan 20°}{\tan 35° - \tan 20°} \simeq 1082 \text{ m}$$

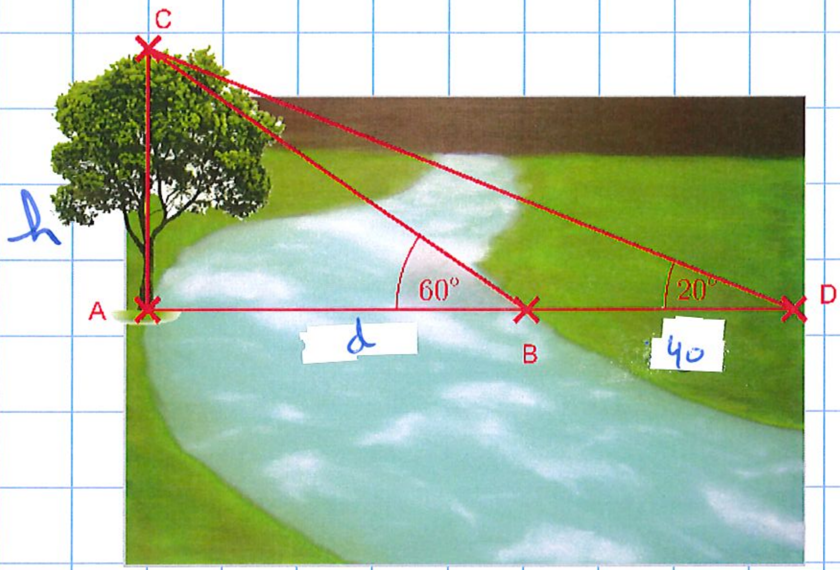
Si le ballon se trouve entre les deux maisons :

$$\begin{cases} \tan 35° = \dfrac{l}{d} \\ \tan 20° = \dfrac{l}{1000 - d} \end{cases}$$

(d = dist % à C)

$$\Rightarrow d = \frac{1000 \tan 20°}{\tan 35° + \tan 20°} \simeq 342 \text{ m}$$

30. Une personne placée au bord d'une rivière voit sous un angle de 60° un arbre planté sur la rive opposée. Lorsqu'elle s'éloigne de 40m, l'angle n'est plus que de 20°. Calculer la hauteur de l'arbre et la largeur de la rivière.



Dans ABC : $\tan 60° = \frac{h}{d}$

Dans ADC, $\tan 20° = \frac{h}{d+40}$

Comme dans l'exercice 28:

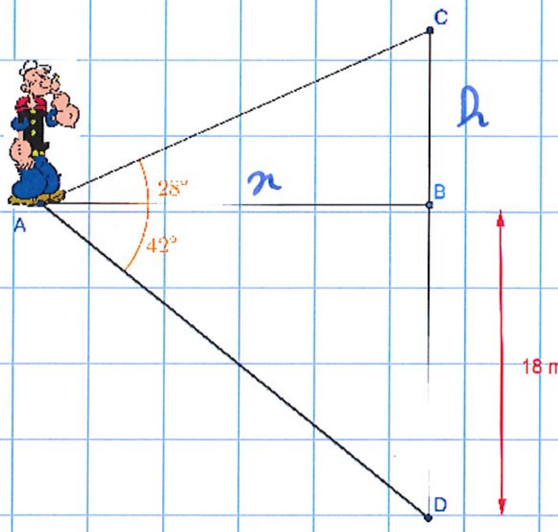
$$d = \frac{40 \tan 20°}{\tan 60° - \tan 20°}$$

$$h = \frac{40 \tan 20° \tan 60°}{\tan 60° - \tan 20°}$$

$\Leftrightarrow d \simeq 10,64\,m$

$h \simeq 18,43\,m$

31. D'une hauteur de 18 mètres, un marin peut voir le bas d'un mât selon un angle de 42° et son sommet (situé au dessus de lui) selon un angle de 28°. Quelle est la hauteur du mât au mètre près ?



Dans ABD : $\tan 42° = \dfrac{18}{x}$
(TOA)

$\Leftrightarrow x = \dfrac{18}{\tan 42°}$

$\simeq 20\,m$

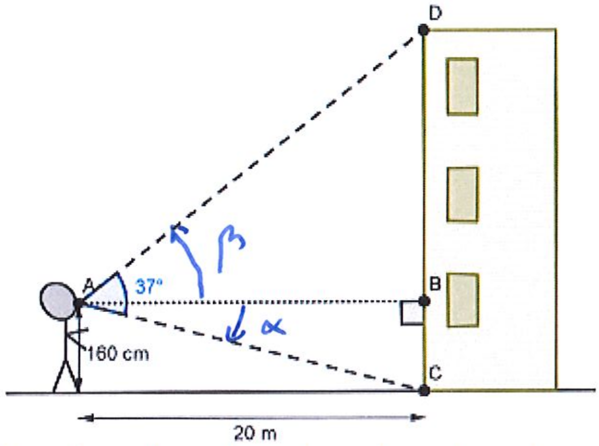
Dans ABC $\tan 28° = \dfrac{h}{x}$

$\Leftrightarrow h = x \tan 28°$

$\simeq 10{,}63\ m$

$\Rightarrow$ la hauteur du mât est : $18 + 11\,m = 29\,m$

32. Sur la figure suivante la personne, dont les yeux se trouvent en à 160 cm du sol et qui se tient à 20 m de l'immeuble, voit celui-ci sous un angle $\widehat{CAD} = 37°$. Quelle est la hauteur de l'immeuble.



Dans ABC : $\tan \alpha = \frac{1,6}{20} \iff \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1,6}{20}\right)$
$\simeq 4,57°$

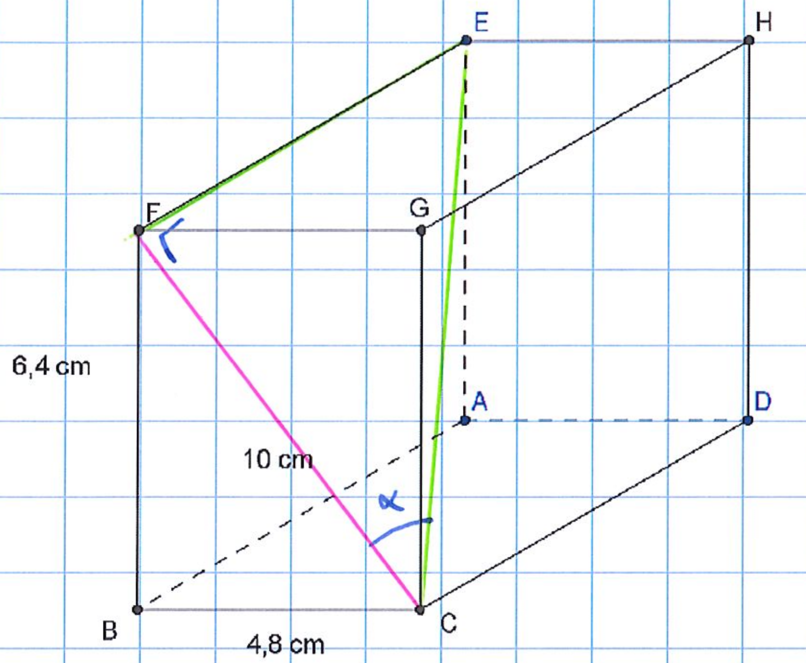
$\Rightarrow \beta = 32,43°$

Dans ABD $\quad \tan 32,43° = \frac{|BD|}{20}$

$\iff |BD| = 20 \cdot \tan 32,43$
$\simeq 12,71\,m$

$\Rightarrow h = 12,71 + 1,6 = 14,3\,m$

33. ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que $AB = 10$ cm ; $BC = 4{,}8$ cm ; $GC = 6{,}4$ cm.



(a) Calcule FC.

(b) Quelle est la nature du triangle EFC ?

(c) Donne l'arrondi à l'unité de la mesure de l'angle $\widehat{FCE}$.

a) Dans FBC : $|FC|^2 = |FB|^2 + |BC|^2$

$\Leftrightarrow |FC| = 8$

b) EFC est rectangle en F

c) $\alpha \rightarrow$ TOA. $\tan\alpha = \frac{|EF|}{|FC|} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)$

$\simeq 51°$