Second degré : Solutions

1. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

(a) $x^2 - 4x - 5 = 0$

$\Delta = 16 + 20 = 36$ $\quad x_{1,2} = \dfrac{4 \pm 6}{2} \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$

(b) $x^2 + 16x + 23 = 0$

$\Delta = 256 - 92 = 164$ $\quad x_{1,2} = \dfrac{-16 \pm 2\sqrt{41}}{2} \begin{cases} -8 + \sqrt{41} \\ -8 - \sqrt{41} \end{cases}$

(c) $x^2 - 11x + 28 = 0$

$\Delta = 121 - 112 = 9$ $\quad x_{1,2} = \dfrac{11 \pm 3}{2} \begin{cases} 7 \\ 4 \end{cases}$

(d) $x^2 + x - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 4 = 5$ $\quad x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{cases} \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

(e) $-5x^2 + 2\sqrt{5}x = 1$

$\Delta = 20 - 20 = 0$ $\quad x_1 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-2\sqrt{5}}{-10} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

(f) $-4x^2 - x - 6 = 0$

$$\Delta = 1 - \cancel{24}\ 96 = -\cancel{23}\ 95 \longrightarrow$$

(g) $23x - 6x^2 + 4 = 0$

$$\Delta = 529 + 96 = 625 \qquad x_{1,2} = \frac{-23 \pm 25}{-12} \begin{cases} -\frac{1}{6} \\ 4 \end{cases}$$

(h) $3x^2 - 2\sqrt{6}x - 3 = 0$

$$\Delta = 24 + 36 = 60 \qquad x_{1,2} = \frac{2\sqrt{6} \pm 2\sqrt{15}}{6}$$

$$= \begin{cases} \frac{\sqrt{6} + \sqrt{15}}{3} \\ \frac{\sqrt{6} - \sqrt{15}}{3} \end{cases}$$

(i) $-\frac{11}{3}x - \frac{7}{6} = \frac{1}{2}x^2$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 22x + 7 = 0$$

$$\Delta = 484 - 84 = 400 \qquad x_{1,2} = \frac{-22 \pm 20}{6} \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ -7 \end{cases}$$

(j) $\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} + 4x = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 4\sqrt{2}\,x + 1 = 0$$

$$\Delta = 32 - 8 = 24 \qquad x_{1,2} = \frac{-4\sqrt{2} \pm 2\sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{2}$$

2. En utilisant la technique de la somme et du produit, résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

(a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

$S = 5$ $P = 6$

x_1	x_2	$x_1 + x_2$
-1	-6	-7
-2	-3	-5
2	3	5 ←
1	6	7

$S : \{2, 3\}$

(b) $x^2 - 5x + 4 = 0$

$S = 5$ $P = 4$

x_1	x_2	$x_1 + x_2$
-1	-4	-5
2	2	4
-2	-2	-4
1	4	5 ←

$S : \{1, 4\}$

(c) $x^2 - 4x - 21 = 0$

$S = 4$ $P = -21$

x_1	x_2	$x_1 + x_2$
-1	21	20
-3	7	4 ←
3	-7	-4
1	-21	-20

$S : \{-3, 7\}$

3. Déterminer deux nombres dont la somme vaut 29 et le produit 198.

$$x^2 - 29x + 198 = 0$$

$$\Delta = 841 - 792 = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{29 \pm 7}{2} \begin{cases} 18 \\ 11 \end{cases}$$

4. Trouver, si possible, deux réels connaissant leur somme S et leur produit P

(a) $S = 2a + 1$ et $P = a^2 + a - 2$

$$x^2 - (2a+1)x + (a^2 + a - 2) = 0$$

$$\Delta = (2a+1)^2 - 4(a^2 + a - 2)$$

$$= 4a^2 + 4a + 1 - 4a^2 - 4a + 8 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{2a + 1 \pm 3}{2} \begin{cases} a + 2 \\ a - 1 \end{cases}$$

(b) $S = a + b - 1$ et $P = ab - b$

$$x^2 - (a + b - 1)x + (ab - b) = 0$$

$$\Delta = (a + b - 1)^2 - 4(ab - b)$$

$$= a^2 + b^2 + 1 + 2ab - 2a - 2b - 4ab + 4b$$

$$= a^2 + b^2 + 1 - 2ab - 2a + 2b$$

$$= (a - b - 1)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{a + b - 1 \pm (a - b - 1)}{2} \begin{cases} a - 1 \\ b \end{cases}$$

5. Vérifier que le nombre a donné est solution de l'équation proposée et en déduire l'autre solution (sans utiliser Δ)

(a) $x^2 - \sqrt{3}x - 2(2+\sqrt{3}) = 0$, a =-2

$a = -2$ est solution $\Leftrightarrow (-2)^2 - \sqrt{3}(-2) - 4 - 2\sqrt{3} = 0$

$\Leftrightarrow 4 + 2\sqrt{3} - 4 - 2\sqrt{3} = 0$ ok

$\Rightarrow x_1 = -2$

$S = \sqrt{3} = x_1 + x_2$

$\Rightarrow x_2 = \sqrt{3} - x_1$

$= \sqrt{3} + 2$

(b) $-5x^2 + 18 = -x$, a =2

$-5x^2 + x + 18 = 0$

$a = 2$ est sol $\Leftrightarrow -5(2)^2 + 18 = -2$

$\Leftrightarrow -20 + 18 = -2$ ok

$\Rightarrow x_1 = 2$

$S = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{-5} = \frac{1}{5} = x_1 + x_2$

$\Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{5} - 2 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{5}$

6. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x (les autres lettres représentent des nombres réels non nuls)

(a) $(x-4c)^2 - 13c(2c-x) = 2cx$

$\iff x^2 - 8xc + 16c^2 - 26c^2 + 13xc - 2xc = 0$

$\iff x^2 + 3xc - 10c^2 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 3c \\ c = -10c^2 \end{array}\right\} \quad \Delta : 9c^2 + 40c^2 = 49c^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-3c \pm 7c}{2} \left\langle \begin{array}{l} 2c \\ -5c \end{array}\right.$$

$S : \{-5c, 2c\}$

(b) $\frac{x}{p}\left(x - \frac{p}{r}\right) = \frac{1}{r}(p - rx)$

$\iff \frac{x^2}{p} - \frac{x}{r} - \frac{p}{r} + x = 0$

$\iff rx^2 - px + prx - p^2 = 0$

$\iff rx^2 - p(1-r)x - p^2 = 0$

$$\begin{aligned} \Delta &= p^2(1-r)^2 - 4(r)(-p^2) \\ &= p^2(r^2 - 2r + 1) + 4rp^2 \\ &= p^2r^2 - 2rp^2 + p^2 + 4rp^2 \\ &= p^2r^2 + 2rp^2 + p^2 \\ &= p^2(r^2 + 2r + 1) \\ &= p^2(r+1)^2 \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{p(1-r) \pm p(1+r)}{2r} \left\langle \begin{array}{l} \frac{p}{r} \\ -p \end{array}\right.$$

$S : \{-p, \frac{p}{r}\}$

7. Soit l'équation $x^2 - 4x - 15 = 0$ dont les solutions sont x' et x''. Sans calculer x' et x'', déterminer la valeur de

Pour cette équation :
$S = 4$, $P = -15$

(a) $2x' + 2x''$

$= 2(x' + x'')$

$= 2S$

$= 8$

(b) $\dfrac{1}{x'} + \dfrac{1}{x''}$

$= \dfrac{x' + x''}{x'x''}$

$= \dfrac{S}{P}$

$= -\dfrac{4}{15}$

(c) $\dfrac{x''}{x'} + \dfrac{x'}{x''}$

$= \dfrac{x'^2 + x''^2}{x'x''}$

On $x'^2 + x''^2 = (x'^2 + x''^2 + 2x'x'') - 2x'x''$

$= (x' + x'')^2 - 2x'x''$

$= S^2 - 2P$

$= 16 + 30$

$= 46$

$\Rightarrow \dfrac{x''}{x'} + \dfrac{x'}{x''} = \dfrac{46}{-15} = -\dfrac{46}{15}$

8. Factoriser les expressions suivantes :

(a) $3x^2 + 2x$ $= x(3x+2)$

(b) $2x^2 - 9x - 5$

$\Delta = 81 + 40 = 121$ $\qquad x_{1,2} = \dfrac{9 \pm 11}{4}$ → 5 ; $-\dfrac{1}{2}$

$2x^2 - 9x - 5 = 2(x-5)(x+\frac{1}{2})$

$= (x-5)(2x+1)$

(c) $-3x^2 + 11x - 8$

$\Delta = 121 - 96 = 25$ $\qquad x_{1,2} = \dfrac{-11 \pm 5}{-6}$ → 1 ; $\dfrac{8}{3}$

$-3x^2 + 11x - 8 = -3(x-1)(x-\frac{8}{3})$

$= (x-1)(3x-8)$

(d) $\frac{1}{2}x^2 - 12 - \frac{5}{2}x$

$$\Delta = \frac{25}{4} + \frac{96}{4} = \frac{121}{4} \qquad x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \frac{11}{2} \begin{cases} 8 \\ -3 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 12 = \frac{1}{2}(x+3)(x-8)$$

(e) $x^2 + x - 1$

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x^2 + x - 1 = \left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$= \left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Toutes les fact. x font avec Δ !

9. Simplifier les fractions suivantes après avoir posé les conditions d'existence :

(a) $\dfrac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 5x + 2}$

N : $(x+1)(x-2)$

D : $2(x-2)(x-\frac{1}{2})$ $\longrightarrow$ $\underline{CE}$: $x \neq 2$; $x \neq \frac{1}{2}$

$$\frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 5x + 2} = \frac{(x+1)\cancel{(x-2)}}{2\cancel{(x-2)}(x-\frac{1}{2})} = \frac{x+1}{2x-1}$$

(b) $\dfrac{2x^2 + 4x - 6}{-x^2 - x + 6}$

N : $2(x-1)(x+3)$

D : $-(x-2)(x+3)$ $\longrightarrow$ $\underline{CE}$: $x \neq -3$, $x = 2$

$$\frac{2x^2 + 4x - 6}{-x^2 - x + 6} = \frac{2(x-1)\cancel{(x+3)}}{-(x-2)\cancel{(x+3)}} = \frac{2(x-1)}{2-x}$$

(c) $\dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2\sqrt{2}x + 1}$

$\underline{N}$: $\Delta = 4 + 4 = 8$ $\quad x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$

$$(x + 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2})$$

$\underline{D}$: $\Delta = 8 - 4 = 4$ $\quad x_{1,2} = \dfrac{2\sqrt{2} \pm 2}{2} = \sqrt{2} \pm 1$

$$(x + 1 - \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2})$$

$\underline{CE}$: $x \neq \sqrt{2} \pm 1$

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2\sqrt{2}x + 1} = \frac{x + 1 + \sqrt{2}}{x - 1 - \sqrt{2}}$$

10. Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

(a) $-x^2 - 4x + 5 \geq 0$

$\Delta = 16 - 4(-1)(5) = 36$ $\qquad x_{1,2} = \frac{4 \pm 6}{-2}$: -5 ; 1

x		-5		1	
I_m	$-$	0	$+$	0	$-$

$S : [-5, 1]$

(b) $x^2 + x - 3 \geq 0$

$\Delta = 1 - 4(-3)(1) = 13$ $\qquad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$

x		$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$	
I_m	$+$	0	$-$	0	$+$

$S : -\infty, \frac{-1-\sqrt{13}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{13}}{2}, +\infty$

(c) $-3x^2 - 4x > 2$ $\iff -3x^2 - 4x - 2 > 0$

$\Delta = 16 - 4(-3)(-2) = -8 < 0$

Le trinôme $-3x^2 - 4x - 2$ est tjs négatif (car $a < 0$) et l'inéq. jamais vérifiée.

$S = \emptyset$

(d) $4x^2 + 1 > -3x$ $\iff 4x^2 + 3x + 1 > 0$

$\Delta = 9 - 4(4)(1) = -7 < 0$

Pour la m̂ raison que (c), $S = \mathbb{R}$

11. Résoudre dans $\mathbb{R}$

(a) $\dfrac{2x}{x+3} + \dfrac{5}{x} - 4 = \dfrac{18}{x^2+3x}$

CE : $x \neq 0$, $x \neq -3$

$$\frac{2x^2 + 5(x+3) - 4(x^2+3x) - 18}{\cancel{x(x+3)}} = 0$$

$2x^2 + 5x + 15 - 4x^2 - 12x - 18 = 0$

$-2x^2 - 7x - 3 = 0$

$2x^2 + 7x + 3 = 0$

$\Delta = 49 - 24 = 25$, $x_{1,2} = \dfrac{-7 \pm 5}{4} \left\langle \begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ -3 \end{matrix} \right.$ AR

$S : \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$

(b) $\dfrac{5x}{x-3} + \dfrac{4}{x+3} = \dfrac{90}{x^2-9}$

CE : $x \neq -3$, $x \neq 3$

$$\frac{5x(x+3) + 4(x-3) - 90}{\cancel{x^2-9}} = 0$$

$5x^2 + 15x + 4x - 12 - 90 = 0$

$5x^2 + 19x - 102 = 0$

$\Delta = 361 + 2040 = 2401 = (49)^2$

AR

$x_{1,2} = \dfrac{-19 \pm 49}{10} \left\langle \begin{matrix} 3 \\ -\frac{34}{5} \end{matrix} \right.$

$S : \left\{ -\frac{34}{5} \right\}$

(c) $\dfrac{x+1}{3x+2} = \dfrac{x-2}{2x-3}$ $\underline{CE}$: $x \neq -\frac{2}{3}$, $x \neq \frac{3}{2}$

$(x+1)(2x-3) = (x-2)(3x+2)$

$2x^2 + 2x - 3x - 3 = 3x^2 + 2x - 6x - 4$

$x^2 - 3x - 1 = 0$

$\Delta = 9 + 4 = 13$ $x_{1,2} : \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

$S : \left\{ \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \right\}$

(d) $\dfrac{3x-1}{x-2} + \dfrac{2x-1}{x+1} = \dfrac{1}{x^2-x-2}$ $\underline{CE}$: $x \neq 2$, $x \neq -1$

$\dfrac{(3x-1)(x+1) + (2x-1)(x-2) - 1}{\cancel{(x-2)(x+1)}} = 0$

$3x^2 + 3x - x - 1 + 2x^2 - 4x - x + 2 - 1 = 0$

$5x^2 - 3x = 0$

$x(5x-3) = 0$

$\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{5} \end{cases}$

$S : \left\{ 0, \frac{3}{5} \right\}$

(e) $1 - \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x+4}{x+1}$

$CE: x \neq -2, \quad x \neq -1$

$$\frac{x^2+3x+2 - x - 1 + x^2+2x - (x+4)(x+2)}{(x+1)(x+2)} = 0$$

$2x^2 + 4x + 1 - (x^2 + 6x + 8) = 0$

$x^2 - 2x - 7 = 0$

$\Delta = 4 + 28 = 32 \qquad x_{1,2} = \dfrac{2 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 1 \pm 2\sqrt{2}$

$S: \{1 \pm 2\sqrt{2}\}$

(f) $\dfrac{1-x}{x^2+2x-8} - \dfrac{x-1}{x^2-6x+8} = \dfrac{x+1}{x^2-2x-8} + \dfrac{x+1}{x^2+6x+8}$

$D_1: (x+4)(x-2)$

$D_2: (x-4)(x-2) \qquad CE: x \neq \pm 4, \quad x \neq \pm 2$

$D_3: (x-4)(x+2)$

$D_4: (x+4)(x+2)$

$$\frac{-(x-1)(x-4) - (x-1)(x+4)}{(x+4)(x-2)\cancel{(x-4)}} = \frac{(x+1)(x+4) + (x+1)(x-4)}{\cancel{(x-4)}(x+2)\cancel{(x+4)}}$$

$(x-1)(-x+\cancel{4} - x - \cancel{4})(x+2) = (x-2)(x+1)(x+\cancel{4} + x - \cancel{4})$

$+2x\left[(x-2)(x+1) + (x-1)(x+2)\right] = 0$

$2x(x^2 - x - 2 + x^2 + x - 2) = 0$

$2x(2x^2 - 4) = 0$

$4x(x^2 - 2) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

$S: \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$

12. Résoudre dans $\mathbb{R}$

(a) $\dfrac{2x(25x^2-16)}{(4x^2-1)(-x^2+6x-9)} \leq 0$

zéros : N : $x = 0$

$x = \pm \frac{4}{5}$

D : $x = \pm \frac{1}{2}$

$x = 3$

x		$-\frac{4}{5}$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{4}{5}$		3	
$2x$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$25x^2-16$	$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$4x^2-1$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$-x^2+6x-9$	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$-$
Inéq	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$

$S: \left[-\frac{4}{5}, -\frac{1}{2}\right[\cup \left[0, \frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{4}{5}, 3\right[\cup \left]3, +\infty\right[$

(b) $\dfrac{2x^2-10x-14}{x^2-3x+2} > 1$

$$\frac{2x^2-10x-14-x^2+3x-2}{x^2-3x+2} > 0$$

$$\frac{x^2-7x-16}{x^2-3x+2} > 0$$

zéros : N : $\Delta_N = 49+64 = 113$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{113}}{2}$$

D : $\Delta_D = 9-8 = 1$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

x		$\frac{7-\sqrt{113}}{2}$		1		2		$\frac{7+\sqrt{113}}{2}$	
N	+	0	−		−		−	0	+
D	+		+	0	−	0	+		+
$I_n(x)$	+	0	−	‖	+	‖	−	0	+

$$S: \left]-\infty, \frac{7-\sqrt{113}}{2}\right[\cup \left]1, 2\right[\cup \left]\frac{7+\sqrt{113}}{2}, +\infty\right[$$

(c) $2x(x^2-1)(x+2)+3(x+2)\leq 3x^2(x+2)$

$\Leftrightarrow 2x(x^2-1)(x+2)+3(x+2)-3x^2(x+2)\leq 0$

$\Leftrightarrow (x+2)[2x(x^2-1)+3-3x^2]\leq 0$

$\Leftrightarrow (x+2)[2x(x^2-1)-3(x^2-1)]\leq 0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-1)(2x-3)\leq 0$

$x=-2$ $\qquad$ $x=\pm 1$ $\qquad$ $x=\frac{3}{2}$

x		-2		-1		1		$\frac{3}{2}$	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
x^2-1	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$2x-3$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
I_n	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$S: [-2,-1]\cup[1,\frac{3}{2}]$

(d) $\dfrac{3x^2 - x - 18}{x^2 - 6 - x} > 2$

$$\frac{3x^2 - x - 18 - 2(x^2 - x - 6)}{x^2 - x - 6} > 0$$

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 6} > 0$$

zeros : N : $x = -3$, $x = 2$

D : $x = 3$, $x = -2$

x		-3		-2		2		3	
N	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
D	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
In	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

S : $-\infty, -3\,[\; \cup \;]-2, 2\,[\; \cup \;]\,3, +\infty$

(e) $\dfrac{24-4x^2-20x}{4x^2-12x+9} \le -1$

$$\frac{-4x^2-20x+24+4x^2-12x+9}{(2x-3)^2} \le 0$$

$$\frac{-32x+33}{(2x-3)^2} \le 0$$

x		$\frac{33}{32}$		$\frac{3}{2}$	
N	+	0	−		−
D	+		+	0	+
In	+	0	−	$\nexists$	−

S: $\left[\frac{33}{32}, \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$

(f) $\dfrac{x+2}{6x^3-11x^2-3x+2} \leq \dfrac{x+1}{6x^3-13x^2+x+2}$

Factorisation de D : Horner

$$6x^3-11x^2-3x+2 = (x-2)(2x+1)(3x-1)$$
$$6x^3-13x^2+x+2 = (x-2)(2x-1)(3x+1)$$

$$\frac{(x+2)(2x-1)(3x+1)-(x+1)(2x+1)(3x-1)}{(x-2)(2x-1)(2x+1)(3x-1)(3x+1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)(6x^2-x-1)-(x+1)(6x^2+x-1)}{D} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x^3+11x^2-3x-2-(6x^3+7x^2-1)}{D} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2-3x-1}{D} \leq 0$$

zéros N : $\Delta = 25$ $\quad x_{1,2} = \dfrac{3\pm5}{8}$: 1, $-\dfrac{1}{4}$

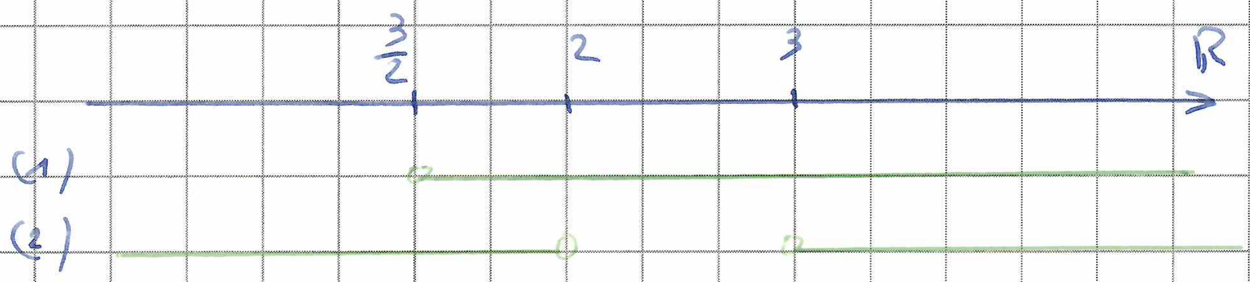
x		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		1		2	
N	+		+		+	0	−		−		−	0	+		+
$x-2$	−		−		−		−		−		−		−	0	+
$4x^2-1$	+	0	−		−		−		−	0	+		+		+
$9x^2-1$	+		+	0	−		−	0	+		+		+		+
Im.	−	∄	+	∄	−	0	+	∄	−	∄	+	0	−	∄	+

$$S : -\infty, -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}] \cup]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[\cup [1, 2[$$

(g) $\begin{cases} 3 - 2x < 0 & (1) \\ x^2 - 5x + 6 > 0 & (2) \end{cases}$

$(1) \iff x > \frac{3}{2}$

$(2) \overset{\Delta \text{ T.S.}}{\iff} x \in -\infty, 2 [\cup] 3, +\infty$



$\Rightarrow S :] \frac{3}{2}, 2 [\cup] 3, +\infty$

(h) $\begin{cases} \dfrac{-x^2+4x-3}{2x(x^2-4)} < 0 & (1) \\[2ex] \dfrac{10x(x-3)}{4x^2-5x+1} > 0 & (2) \end{cases}$

(1) : zéros N : $\Delta = 16 - 12 = 4$ $\qquad x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm 2}{-2} \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$

x		-2		0		1		2		3	
N	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$2x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
x^2-4	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
(1)	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$

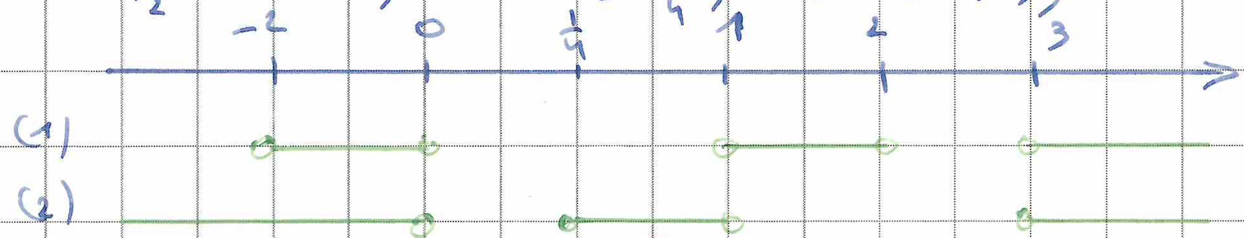
$S_1 = \left]-2, 0\right[\cup \left]1, 2\right[\cup \left]3, +\infty\right[$

(2) zéros D : $4x^2 - 5x + 1 = 0$ $\qquad \Delta = 25 - 16 = 9$

$x_{1,2} = \dfrac{5 \pm 3}{8} \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{4} \end{cases}$

x		0		$\frac{1}{4}$		1		3	
$10x$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
D	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
(2)	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$

$S_2 : \left]-\infty, 0\right[\cup \left]\frac{1}{4}, 1\right[\cup \left]3, +\infty\right[$



$S : \left]-2, 0\right[\cup \left]3, +\infty\right[$

13. Problèmes du second degré :

(a) Un brocanteur achète une caisse contenant un lot "soldé" de vases en verre blanc pour 360€ , 3 sont cassés et vend les autres 5€ de plus par vase qu'ils ne lui ont coûté. Il gagne ainsi 15€ sur son marché ; combien chaque vase lui avait-il couté ?

Soit x le nombre de vases $\rightarrow$ prix $= \frac{360}{x}$

On a : $(x-3)\left(\frac{360}{x}+5\right) = 375$

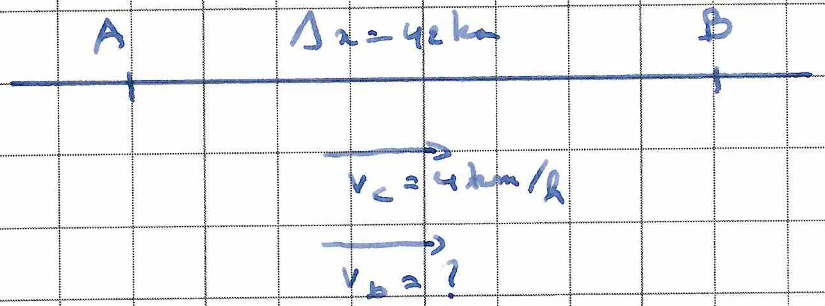
$\Leftrightarrow (x-3)(360+5x) = 375x$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 30x - 1080 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 216 = 0$

$\Delta = 864 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -12 \text{ (A.R.)} \\ x = 18 \rightarrow \text{prix} = 20\text{ €} \end{cases}$

(b) Deux villes "A" et "B" sont situées sur un fleuve ;" A" à 42 km en aval de " B". Un bateau fait le service entre les deux villes. Sachant que la vitesse du courant est de 4 km/h et que la différence des trajets " AB" et " BA" est de 1h 12 min. Calculer la vitesse du bateau.



$t_{AB} = \frac{42}{v_b + v_c}$ $t_{BA} = \frac{42}{v_b - v_c}$ $x = v_b$

$t_{BA} - t_{AB} = 1h12 = \frac{6}{5}$

$\Rightarrow \frac{42}{x-4} - \frac{42}{x+4} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow 6x^2 - 1776 = 0$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{296} \simeq 17,2 \text{ km/h}$

(c) Une amicale d'anciens élèves organise une excursion en autocars. Le prix global de l'excursion s'élève à 1200€. Le nombre des participants étant supérieur de " 4"au nombre prévu chacun peut ainsi payer 10€en moins. Quel était primitivement le nombre d'excursionnistes ?

Soit x le nombre d'excursionnistes.

prix par excursionniste : $\frac{1200}{x}$

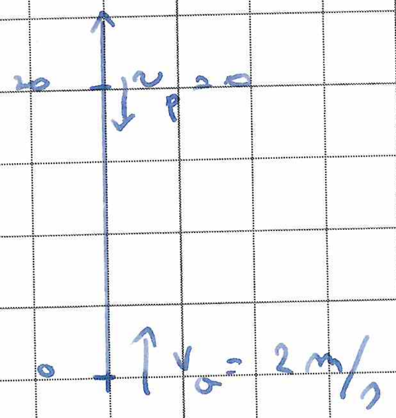
Eq : $\frac{1200}{x} = \frac{1200}{x+4} + 10$

$\iff 10(x^2+4x) + 1200(\cancel{x} - \cancel{x} - 4) = 0$

$\iff 10x^2 + 4\cancel{0}x - 480\cancel{0} = 0$

$\Delta = 1936 \iff \begin{cases} x = -24 \text{ (AR)} \\ x = 20 \end{cases}$

(d) Un ascenseur monte dans une cage d'escalier à la vitesse constante de 2 mètres par seconde. Quand il a parcouru 10 mètres, on abandonne, à 20 mètres du bas ~~de la cage~~ une pierre qui descend avec une accélération de 9,80 mètre à la seconde par seconde. A quelle distance du haut de la cage , la rencontre se produira-t-elle ?.



$\left.\begin{array}{l} x_p = 20 - g\frac{t^2}{2} \\ x_a = v_a t \end{array}\right\} x_a + 10 = x_p$

$\iff 20 - g\frac{t^2}{2} = v_a t + 10$

$\iff 4{,}9t^2 + 2t - 10 = 0$

$\Delta = 396 \iff \begin{cases} t_1 = \frac{-10 - 50\sqrt{2}}{49} \text{ (AR)} \\ t_2 = \frac{-10 + 50\sqrt{2}}{49} \simeq 1{,}24\,s \end{cases}$ $\to x = 20 - (10 + 2 \cdot 1{,}24)$

$\simeq 7{,}52\ m$

(e) Un robinet B met 40 min de plus qu'un robinet A pour vider un réservoir. Lorsqu'on ouvre simultanément les deux robinets le réservoir est vidé en 48 min. Quel temps faut-il à chacun pour vider le réservoir ?
La notion physique est le débit de vidange d'un réservoir. Le débit représente le volume écoulé par unité de temps :

$$d = \frac{V}{t}$$

On suppose que la vidange du réservoir se fait à débit constant. De plus le débit avec les deux robinets ouverts est égal à la somme des débits du robinet A et du robinet B.

$d = d_A + d_B$

$d_A = \frac{V}{t}$ $\quad d_B = \frac{V}{t+40}$ $\quad d = \frac{V}{48}$

$\Leftrightarrow \frac{\cancel{V}}{t} + \frac{\cancel{V}}{t+40} = \frac{\cancel{V}}{48}$

$\Leftrightarrow 48(2t+40) = t(t+40)$

$\Leftrightarrow t^2 + 40t - 96t - 1920 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 - 56t - 1920 = 0$

$\Delta = 10816$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 80 \\ t_2 = -24 \text{ (A.R)} \end{cases}$