Radicaux : Solutions

1. Simplifier et calculer (les réponses ne peuvent plus contenir d'exposants négatifs)

(a) $\dfrac{(-2)^4.(-2^{-5})}{3^{-2}} = \dfrac{16.\ 9}{-32} = -\dfrac{9}{2}$

(b) $3a^3.4a^{-2} = 12a$

(c) $(-3a^{-2})^{-3} = -\dfrac{1}{27}a^6$

(d) $\dfrac{-4a^3b^{-2}.3a^{-5}}{2ab^{-3}} = -\dfrac{6b}{a^3}$

(e) $a^{-3}.a^7 = a^4$

(f) $(2a^{-2}b^3)^{-2} = \dfrac{a^4}{4b^6}$

(g) $\left(\dfrac{-2a^2b^{-4}}{3a^{-2}b^2}\right)^{-3} = \dfrac{27}{-8}.\ a^{-12}\ b^{18} = -\dfrac{27b^{18}}{8a^{12}}$

2. Réduire les produits suivants :

(a) $\sqrt{3}.\sqrt{3}$ $= 9$

(b) $\sqrt{7}.2\sqrt{7}$ $= 14$

(c) $\sqrt{28}.\sqrt{45}$ $= 2\sqrt{7} . 3\sqrt{5} = 6\sqrt{35}$

(d) $2\sqrt{5}.\sqrt{2}.\sqrt{15}$ $= 2\sqrt{5}\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5} = 10\sqrt{6}$

(e) $\sqrt{52}.\sqrt{39}$ $= 2\sqrt{13} . \sqrt{3.13} = 26\sqrt{3}$

(f) $5\sqrt{12}.\sqrt{24}$ $= 5 . 2\sqrt{3} . 2\sqrt{6} = 60\sqrt{2}$

(g) $\sqrt{27}.\sqrt{75}$ $= 3\sqrt{3} . 5\sqrt{3} = 45$

(h) $2\sqrt{11}.\sqrt{11^3}$ $= 2 . 11^2 = 242$

(i) $\sqrt{32}.3\sqrt{24}.\sqrt{8}$ $= 4\sqrt{2} . 3 . 2\sqrt{6} . 2\sqrt{2} = 96\sqrt{6}$

(j) $3\sqrt{5^2}.\sqrt{5^3}$ $= 3 . 5 . 5 . \sqrt{5} = 75\sqrt{5}$

3. Calculer, en utilisant le moyen le plus simple :

(a) $\sqrt{5}(\sqrt{6}+\sqrt{15})$ $= \sqrt{30} + 5\sqrt{3}$

(b) $\sqrt{12}(\sqrt{48}-\sqrt{5})$ $= 2\sqrt{3} . 4\sqrt{3} - 2\sqrt{15} = 24 - 2\sqrt{15}$

(c) $(3\sqrt{7}-\sqrt{28}).\sqrt{3}$ $= 3\sqrt{21} - 2\sqrt{21} = \sqrt{21}$

(d) $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+3)$ $= 2 + 2\sqrt{2} - 3 = -1 + 2\sqrt{2}$

(e) $(1-\sqrt{3})(5-3\sqrt{3})$ $= 14 - 8\sqrt{3}$

(f) $(3+\sqrt{2})(2-\sqrt{3})$ $= 6 + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} - \sqrt{6}$

(g) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{6})$ $= \sqrt{21} + \sqrt{14} - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

(h) $(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(3\sqrt{15}-\sqrt{6})$ $= 18\sqrt{5} - 6\sqrt{2} - 15\sqrt{3} + \sqrt{30}$

(i) $(\sqrt{24}-3\sqrt{8})(\sqrt{50}+\sqrt{5})$ $= 20\sqrt{3} + 2\sqrt{30} - 60 - 6\sqrt{10}$

(j) $\dfrac{\sqrt{48}\sqrt{15}\sqrt{6}}{\sqrt{20}\sqrt{10}}$ $= \dfrac{4\sqrt{3} . \cancel{\sqrt{5}}\sqrt{3}\ \cancel{\sqrt{2}} . \sqrt{3}}{2\cancel{\sqrt{5}} . \cancel{\sqrt{2}} . \sqrt{5}} = \dfrac{12\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = 6\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

$= \dfrac{6\sqrt{15}}{5}$

4. Calculer, en utilisant le moyen le plus simple :

(a) $3\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$ $= 5\sqrt{5}$

(b) $\sqrt{50}.\sqrt{20}$ $= 5\sqrt{2} \,.\, 2\sqrt{5} = 10\sqrt{10}$

(c) $2\sqrt{5} + \sqrt{2}$ $= 2\sqrt{5} + \sqrt{2}$

(d) $(-3\sqrt{2})^2$ $= 9 . 2 = 18$

(e) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$ $= 3 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}$

(f) $(-5 + \sqrt{5})^2$ $= 25 - 10\sqrt{5} + 5 = 30 - 10\sqrt{5}$

(g) $(2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})$ $= 4 - 5 = -1$

(h) $(\sqrt{3} - 2\sqrt{5})^3$ $= (\sqrt{3})^3 - 3.(\sqrt{3})^2(2\sqrt{5}) + 3\sqrt{3}(2\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{5})^3$
$= 63\sqrt{3} - 58\sqrt{5}$ ⊛

(i) $(3\sqrt{7} + 2\sqrt{3})^3$ $= (3\sqrt{7})^3 + 3(3\sqrt{7})^2(2\sqrt{3}) + 3.3\sqrt{7}(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^3$
$= 189\sqrt{7} + 378\sqrt{3} + 108\sqrt{7} + 24\sqrt{3}$
$= 297\sqrt{7} + 402\sqrt{3}$

(j) $7\sqrt{50} + 4\sqrt{18}$ $= 35\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 47\sqrt{2}$

(k) $(2\sqrt{3} + 5\sqrt{2}).\sqrt{24}$ $= (2\sqrt{3} + 5\sqrt{2})\, 2\sqrt{6}$
$= 4\sqrt{18} + 10\sqrt{12} = 12\sqrt{2} + 20\sqrt{3}$

⊛ $= 3\sqrt{3} - 18\sqrt{5} + 60\sqrt{3} - 40\sqrt{5}$

5. Rationnaliser :

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$

(c) $\sqrt{\dfrac{1}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(d) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

(e) $\sqrt{\dfrac{8}{27}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{9}$

(f) $\dfrac{1}{3+\sqrt{2}} = \dfrac{3-\sqrt{2}}{5}$

(g) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \dfrac{2(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{-2} = -\sqrt{3}-\sqrt{5}$

(h) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{2}(\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{2-12} = \dfrac{6-6\sqrt{6}}{-10} = \dfrac{-3+3\sqrt{6}}{5}$

(i) $\dfrac{3-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1} = \dfrac{(3-\sqrt{2})(2\sqrt{2}-1)}{7} = \dfrac{7\sqrt{2}-7}{7} = \sqrt{2}-1$

(j) $\dfrac{3\sqrt{8}-1}{2+\sqrt{18}} = \dfrac{(6\sqrt{2}-1)(2-3\sqrt{2})}{4-18} = \dfrac{15\sqrt{2}-38}{-14} = \dfrac{38-15\sqrt{2}}{14}$

(k) $\dfrac{2\sqrt{5}-1}{5-2\sqrt{5}} = \dfrac{(2\sqrt{5}-1)(5+2\sqrt{5})}{5} = \dfrac{8\sqrt{5}+15}{5}$

6. Effectuer et rationnaliser éventuellement les fractions obtenues

(a) $5\sqrt{2}-\sqrt{18}+\sqrt{98}$ $= 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

(b) $3\sqrt{5}\;5\sqrt{3}\;(2\sqrt{15})$ $= 30\sqrt{5\cdot 3\cdot 15} = 30\cdot 15 = 450$

(c) $\dfrac{2}{\sqrt{50}}\,\dfrac{\sqrt{8}}{1-\sqrt{5}}$ $= \dfrac{2}{5\cancel{\sqrt{2}}}\cdot\dfrac{2\cancel{\sqrt{2}}}{1-\sqrt{5}}\cdot\dfrac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{\overset{-1}{\cancel{4}}(1+\sqrt{5})}{\cancel{(1-5)}5} = -\dfrac{(1+\sqrt{5})}{5}$

(d) $5\sqrt{12}-2\sqrt{\dfrac{3}{4}}+2\sqrt{27}-8\sqrt{\dfrac{3}{16}}$ $= 10\sqrt{3} - \cancel{2}\dfrac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} + 6\sqrt{3} - \overset{2}{\cancel{8}}\dfrac{\sqrt{3}}{\cancel{4}} = 13\sqrt{3}$

(e) $\sqrt{\dfrac{3}{5}}+2\sqrt{\dfrac{5}{3}}+\sqrt{60}$ $= \dfrac{\sqrt{15}}{5} + 2\dfrac{\sqrt{15}}{3} + 2\sqrt{15} = \dfrac{43\sqrt{15}}{15}$

(f) $(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})(\sqrt{72}-5\sqrt{20}-\sqrt{2})$ $= (4\sqrt{2}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})(6\sqrt{2}-10\sqrt{5}-\sqrt{2})$

$= (3\sqrt{5}-3\sqrt{2})(5\sqrt{2}-10\sqrt{5}) = 15\sqrt{10}-150-30+30\sqrt{10}$

$= +45\sqrt{10}-180 = 45(\sqrt{10}-4)$

(g) $\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}\,\dfrac{14}{\sqrt{2}}$ $= \dfrac{(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}+2}\,\dfrac{14}{\sqrt{2}}\,\dfrac{\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}-2}\,\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\overset{7}{\cancel{14}}\sqrt{2}(5-4\sqrt{5}+4)}{\cancel{2}\cdot(5-4)}$

$= 7\sqrt{2}(9-4\sqrt{5})$

(h) $\dfrac{(\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2}{(\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2}$ $= \dfrac{2+4\sqrt{6}+12}{2-4\sqrt{6}+12} = \dfrac{14+4\sqrt{6}}{14-4\sqrt{6}} = \dfrac{7+2\sqrt{6}}{7-2\sqrt{6}}$

$= \dfrac{(7+2\sqrt{6})(7+2\sqrt{6})}{(7-2\sqrt{6})(7+2\sqrt{6})}$

$= \dfrac{49+28\sqrt{6}+24}{49-24}$

$= \dfrac{73+28\sqrt{6}}{25}$

(i) $\dfrac{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{(18-12\sqrt{6}+12)(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

$= \dfrac{(30-12\sqrt{6})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2-3} =$

$= -6(5-2\sqrt{6})(\cancel{6}-3\sqrt{6}+2\sqrt{6}\cancel{-6}) = 6\sqrt{6}(5-2\sqrt{6})$

$= 30\sqrt{6} - 72$

7. Calculer (sans la calculatrice)

(a) $\sqrt[5]{-243} = \sqrt[5]{-3^5} = -3$

(b) $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

(c) $-\sqrt[4]{625} = -\sqrt[4]{5^4} = -5$

(d) $\sqrt[3]{-0.008} = \sqrt[3]{\dfrac{-8}{1000}} = -\dfrac{2}{10} = -0,2$

(e) $-\sqrt[4]{\dfrac{81}{256}} = -\sqrt[4]{\dfrac{3^4}{4^4}} = -\dfrac{3}{4}$

(f) $\sqrt[3]{343^{-1}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{7^3}} = \dfrac{1}{7}$

(g) $\sqrt[8]{-256}$ impossible

8. Calculer

(a) $25^{\frac{1}{2}}$ $= \sqrt{25} = 5$

(b) $-729^{\frac{1}{3}}$ $= -\sqrt[3]{729} = -\sqrt[3]{9^3} = -9$

(c) $\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3$ $= \left(\sqrt{4}\right)^3 = 2^3 = 8$

(d) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$ $= \sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \sqrt[4]{\frac{2^4}{3^4}} = \frac{2}{3}$

(e) $(4^3)^{\frac{1}{2}}$ $= \sqrt{64} = 8$

(f) $\left(\frac{-32}{243}\right)^{-\frac{2}{5}}$ $= \sqrt[5]{\frac{243^2}{32^2}} = \left(\sqrt[5]{\frac{3^5}{2^5}}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

9. Ecrire sous forme de puissance de a et b ($a, b \in \mathbb{R}_0^+$). Donner la réponse sans exposant négatif et les exprimer sous forme de racines simplifiées ***et*** réduites.

(a) $a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{3}}$ $= a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$

(b) $a^{\frac{5}{3}}.a^{\frac{1}{6}}.a^{-1}$ $= a^{\frac{5}{3}+\frac{1}{6}-1} = a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$

(c) $(a^2b^3)^{\frac{1}{6}}$ $= a^{\frac{2}{6}} b^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{a}\sqrt{b}$

(d) $\left(\frac{a^3b^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{12}}$ $= \frac{a^{\frac{3}{12}} b^{\frac{2}{12}}}{c^{\frac{4}{12}}} = \frac{a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{6}}}{c^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt[4]{a}\sqrt[6]{b}}{\sqrt[3]{c}}$

$= \frac{\sqrt[4]{a}\sqrt[6]{b}\sqrt[3]{c^2}}{c}$

(e) $\left(a^{-\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$= \left(a^{-\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

(f) $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}}$ $= a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$

(g) $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{4}}$ $= a^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{a^3}$

(h) $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{2}{3}}\right)$ $= a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^4}$

$= \sqrt[3]{a^2} - b\sqrt[3]{b}$

(i) $\left(a^{\frac13}+b^{\frac13}\right)\left(a^{\frac23}-b^{\frac23}\right) = a - a^{\frac13} b^{\frac23} + b^{\frac13} a^{\frac23} - b$

$= a - b - \sqrt[3]{ab^2} + \sqrt[3]{a^2 b}$

(j) $\frac{(0,25)^{\frac12}.a^{-3}b^{-2}}{\sqrt{0,04}\sqrt[3]{a^{-1}}.b} = \frac{\sqrt{0,25}}{\sqrt{0,04}} \frac{a^{-3}b^{-2}}{a^{-\frac13} b} = \frac{0,5}{0,2} a^{-3+\frac13} b^{-2-1}$

$= \frac52 a^{-\frac83} b^{-3} = \frac{5}{2\sqrt[3]{a^8}\, b^3} = \frac{5}{2a^2 b\sqrt[3]{a^2}} = \frac{5\sqrt[3]{a}}{2a^3b^3}$

(k) $\left(\sqrt[3]{a^{-2}b^{-3}}\right)^{-2}.\sqrt{a^{-1}b^{\frac12}} = \left(a^{-\frac23} b^{-\frac33}\right)^{-2} a^{-\frac12} b^{\frac14}$

$= a^{\frac43} b^2 a^{-\frac12} b^{\frac14} = a^{\frac56} b^{\frac94} = \sqrt[6]{a^5}\sqrt[4]{b^9}$

$= b^2 \sqrt[6]{a^5}\sqrt[4]{b}$

(l) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a^{-1}.b}}{a.\sqrt{b^{-2}}}} = \left(\frac{a^{-\frac12} b^{\frac12}}{a\, b^{-\frac22}}\right)^{\frac13} = \left(a^{-\frac12-1} b^{\frac12+1}\right)^{\frac13}$

$= \left(a^{-\frac32} b^{\frac32}\right)^{\frac13} = a^{-\frac12} b^{\frac12} = \frac{\sqrt b}{\sqrt a} = \frac{\sqrt{ab}}{a}$

(m) $a\sqrt a \frac{a^2\sqrt{a^{-1}}}{a^{-3}\sqrt[3]a} = a\, a^{\frac12} \frac{a^2 a^{-\frac12}}{a^{-3} a^{\frac13}} = a^{1+\cancel{\frac12}+2-\cancel{\frac12}+3-\frac13}$

$= a^{\frac{3+6+9-1}{3}} = a^{\frac{17}{3}} = \sqrt[3]{a^{17}} = a^5\sqrt[3]{a^2}$

(n) $\left(\frac{\sqrt{a^5}.\sqrt[3]{b^4}}{125a^{-2}\sqrt[5]{b^3}}.\frac{a^{-\frac14}}{b^{-2}}\right)^{-\frac13} = \left(\frac{a^{\frac52} b^{\frac43} a^{-\frac14}}{125 a^{-2} b^{\frac35} b^{-2}}\right)^{-\frac13}$

$= \left(\frac{1}{125} a^{\frac52-\frac14+2} b^{\frac43-\frac35+2}\right)^{-\frac13}$

$= \left(\frac{1}{125} a^{\frac{17}{4}} b^{\frac{41}{15}}\right)^{-\frac13} = (125)^{\frac13} a^{-\frac{17}{12}} b^{-\frac{41}{45}}$

$$= \frac{5}{\sqrt[12]{a^{17}}\ \sqrt[45]{b^{41}}} = \frac{5}{a\ \sqrt[12]{a^{5}}\ \sqrt[45]{b^{41}}}$$

$$= \frac{5\ \sqrt[12]{a^{7}}\ \sqrt[45]{b^{4}}}{a^{2}\ \ b}$$

10. Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée à 10^{-3} près de :

(a) $\sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{4}}+\sqrt[5]{\frac{3}{20}}+10}$ $\simeq 3{,}364$

(b) $\sqrt[5]{2^3-\sqrt[3]{2{,}356}}-\sqrt[4]{32{,}25-\sqrt[3]{23{,}245}}$ $\simeq -0{,}867$