La fonction du second degré : Solutions

1. Dessiner les paraboles suivantes après en avoir déterminé les caractéristiques :

(a)

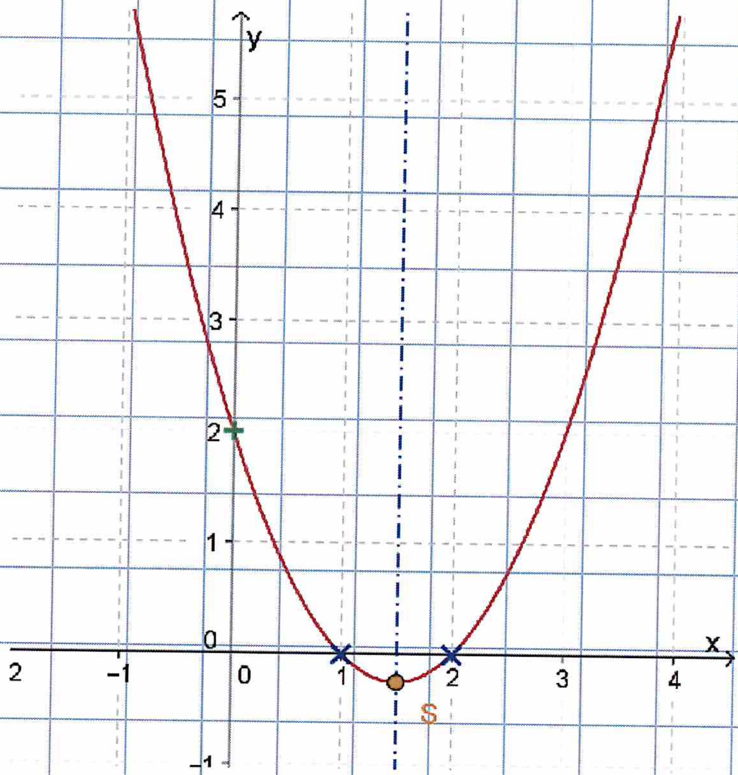
$S : \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

$AS \equiv x = \frac{3}{2}$

$\cap Ox$: $(1,0)$ et $(2,0)$

$\cap Oy$: $(0,2)$

$a > 0$ donc S =minimum



(b)

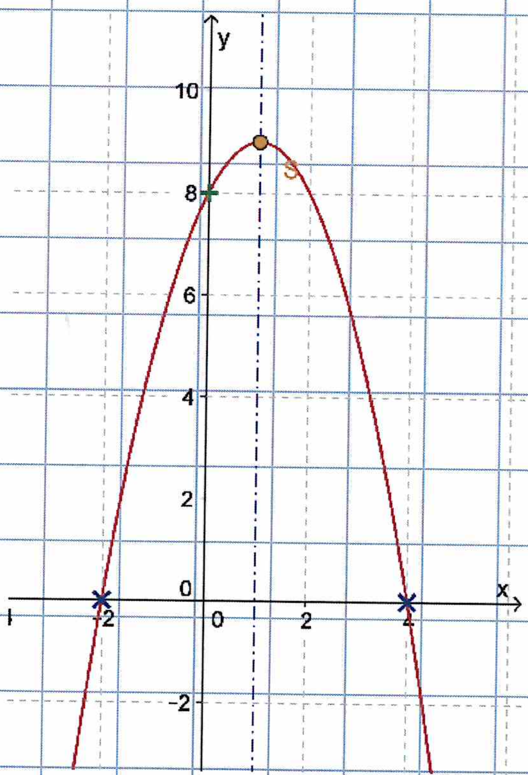
$S : (1,9)$

$AS \equiv x = 1$

$\cap Ox$: $(-2,0)$ et $(4,0)$

$\cap Oy$: $(0,8)$

$a < 0$ donc S =maximum



(c)

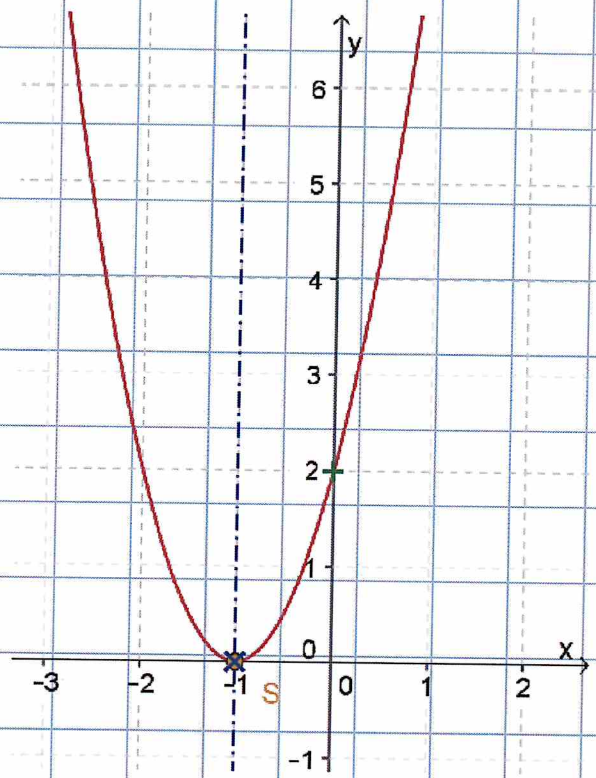
$S : (-1, 0)$

$AS \equiv x = -1$

$\cap Ox : (-1, 0)$

$\cap Oy : (0, 2)$

$a > 0$ donc S =minimum



(d)

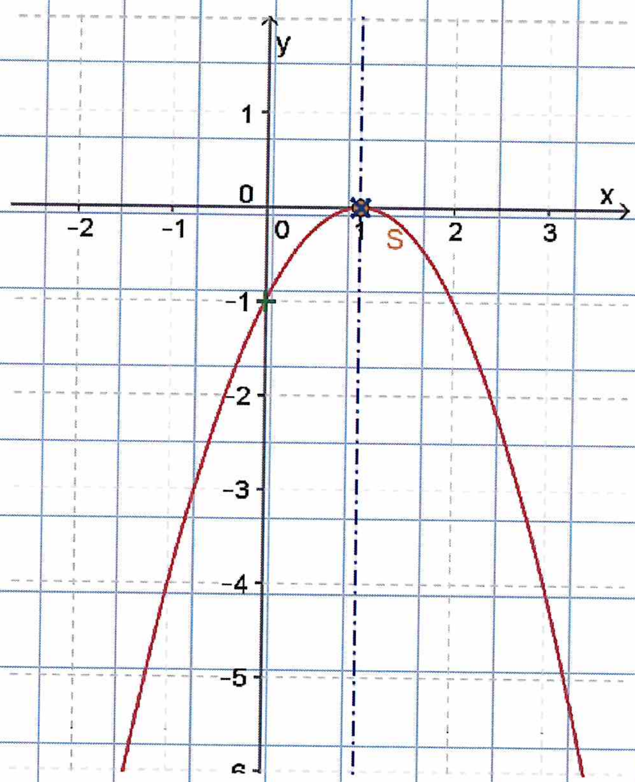
$S : (1, 0)$

$AS \equiv x = 1$

$\cap Ox : (1, 0)$

$\cap Oy : (0, -1)$

$a < 0$ donc S =maximum



(e)

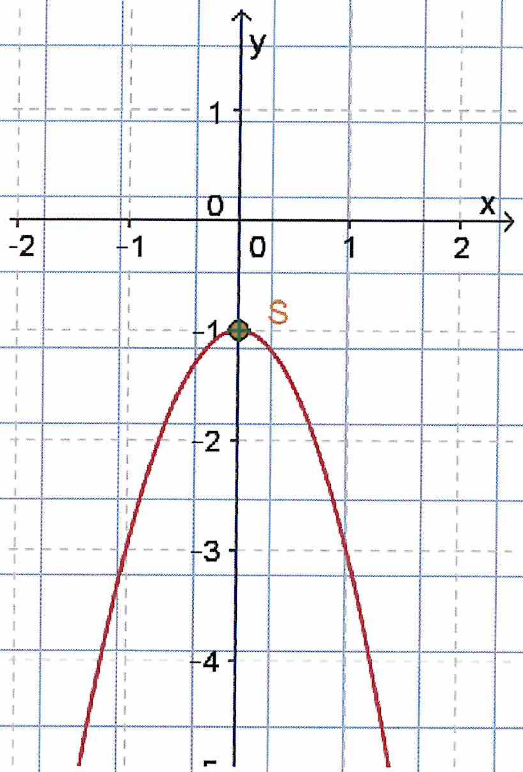
$S : (0, -1)$

$AS \equiv x = 0$

$\cap Ox$: aucune

$\cap Oy : (0, -1)$

$a < 0$ donc S =maximum



(f)

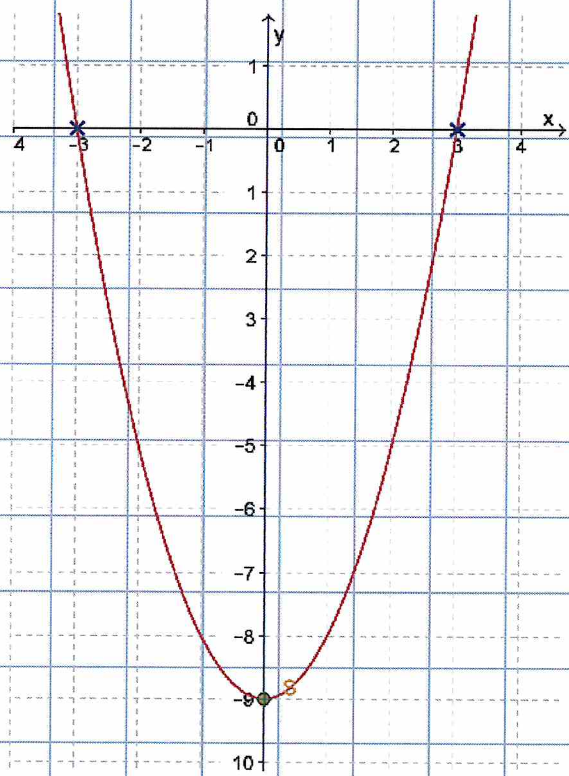
$S : (0, -9)$

$AS \equiv x = 0$

$\cap Ox : (-3, 0)$ et $(3, 0)$

$\cap Oy : (0, -9)$

$a > 0$ donc S =minimum



2. Donner l'équation de la parabole passant par les points (-1,0), (0,1) et (2,0).

$P \equiv y = ax^2 + bx + c$

$(-1,0) \in P \Leftrightarrow 0 = a(-1)^2 + b(-1) + c$

$(0,1) \in P \Leftrightarrow 1 = a.(0) + b(0) + c \Leftrightarrow c = 1$

$(2,0) \in P \Leftrightarrow 0 = a(2)^2 + b(2) + c$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b + 1 = 0 \\ 4a + 2b + 1 = 0 \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 1 \\ 4(b-1) + 2b + 1 = 0 \\ c = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 1 \\ 6b - 3 = 0 \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = 1 \end{cases}$

$P \equiv y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$

3. Déterminer m et p pour que la parabole d'équation $y = -x^2 + mx + p$ admette un minimum en $x = 1$ et un zéro en $x = -2$.

min en $x = 1 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 1 \Leftrightarrow b = -2a$

$\Leftrightarrow b = -2(-1) = 2$

zéro en $x = -2 \Leftrightarrow -4 - 2m + p = 0$

$\Leftrightarrow -4 - 2(2) + p = 0$

$\Leftrightarrow p = 8$

$P \equiv y = -x^2 + 2x + 8$

4. Déterminer l'équation de la parabole qui coupe l'axe Ox au point d'abscisse 2 et dont le sommet est (3,-2).

$P \equiv y = ax^2 + bx + c$

Sommet $(3,-2) \rightarrow -\frac{b}{2a} = 3 \Leftrightarrow b = -6a$

$\cap\, Ox = 2 \Rightarrow 4a + 2b + c = 0$

$(3,-2) \in P \Leftrightarrow 9a + 3b + c = -2$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -6a \\ 4a + 2b + c = 0 & (2) \\ 9a + 3b + c = -2 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ 4a + 2b + c = 0 \\ (3) - (2) : 5a + b = -2 & (3') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ (2) \\ (1) \text{ dans } (3') : 5a - 6a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -12 \\ c = 16 \\ a = +2 \end{cases}$$

$P \equiv y = 2x^2 - 12x + 16$

5. Soit la famille de parabole $y = mx^2 + 2x + m - 2$. Chaque cas étant pris séparément, déterminer m pour que la parabole :

(a) passe par le point (-1,4) ;

$4 = m(-1)^2 + 2(-1) + m - 2$

$\Leftrightarrow 4 = 2m - 4 \Leftrightarrow 2m = 8 \Leftrightarrow m = 4$

(b) admette la droite $d \equiv 2x + 3 = 0$ comme axe de symétrie ;

$d \equiv x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2}$

Dans l'éq de la parabole : $b = 2$, $a = m$

$\Rightarrow -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2m} = -\frac{1}{m} \Leftrightarrow -\frac{1}{m} = -\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$

(c) ne coupe pas l'axe Ox

$$\Rightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow 4 - 4m(m-2) < 0$$
$$\Leftrightarrow 4 - 4m^2 + 8m < 0$$
$$\Leftrightarrow -4m^2 + 8m + 4 < 0$$
$$\Delta = 64 + 64 = 128$$
$$m_{1,2} = \frac{-8 \pm 8\sqrt{2}}{-8} = 1 \pm \sqrt{2}$$

m		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$	
Δ	$-$	0	$+$	0	$-$

$$S: -\infty, -1-\sqrt{2}\,[\, \cup \,]\, -1+\sqrt{2}, +\infty$$

(d) ait son sommet sur la droite $d' \equiv y = x - 3$

$$S: \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) : \left(-\frac{1}{m}, -\frac{-4m^2+8m+4}{4m}\right)$$
$$: \left(-\frac{1}{m}, \frac{m^2-2m-1}{m}\right) \quad (m \neq 0)$$

$$\text{Comme } y = x - 3 \Leftrightarrow \frac{m^2-2m-1}{m} = -\frac{1}{m} - 3$$
$$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 1 = -1 - 3m$$
$$\Leftrightarrow m^2 + m = 0 \Leftrightarrow m(m+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 & (A.R.) \\ m = -1 \end{cases}$$

(e) ait son sommet à gauche de l'axe Oy.

$S\left(-\frac{b}{2a}, \dots\right) \iff -\frac{b}{2a} < 0 \iff -\frac{1}{m} < 0$

$\iff m > 0$

6. Déterminer algébriquement et graphiquement les points d'intersection de $P \equiv y = x^2 - 9$ et $d \equiv y - 2x + 1 = 0$

$$\begin{cases} y = x^2 - 9 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = x^2 - 9 \quad (*) \\ (2) \end{cases}$$

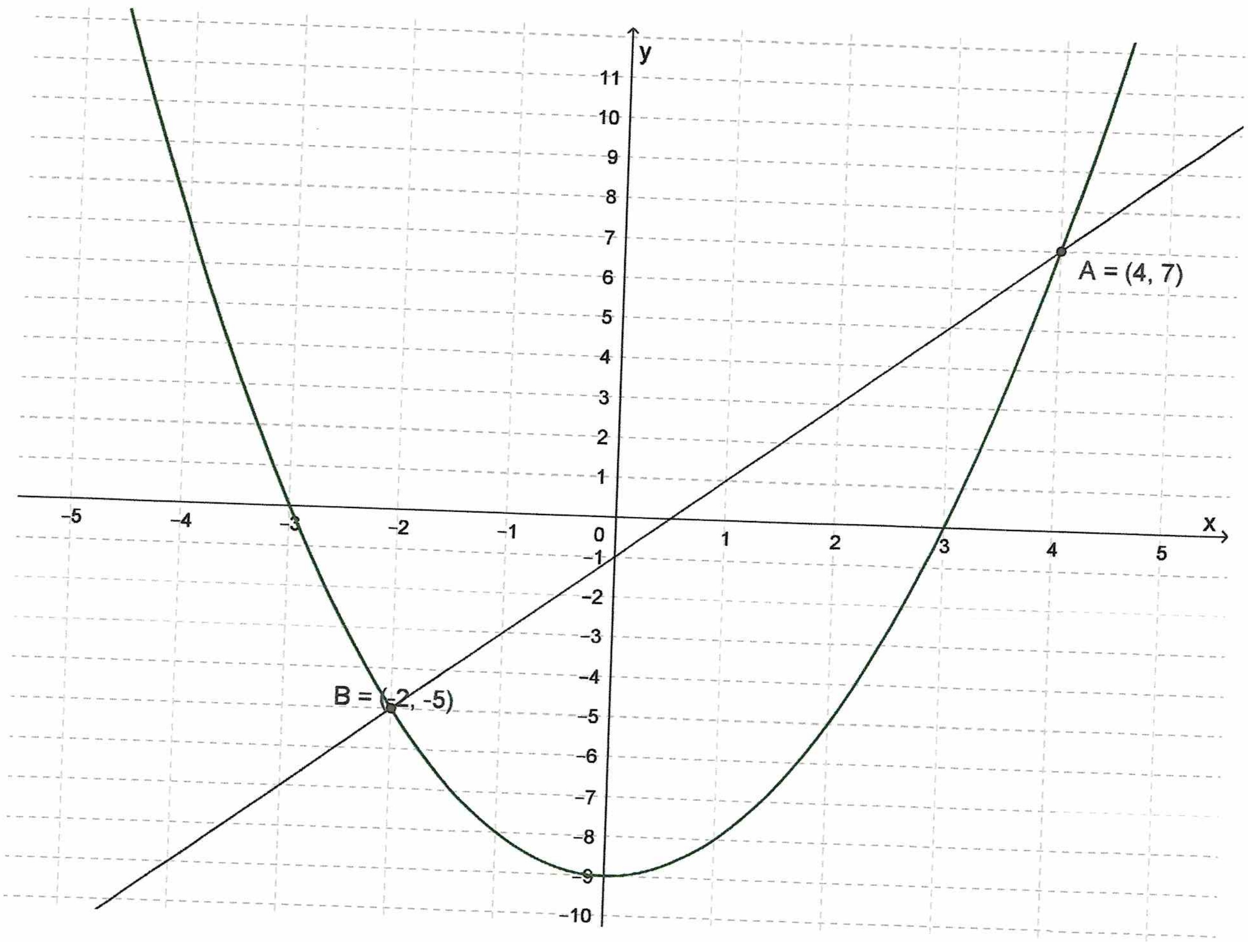
$(*)\quad x^2 - 2x - 8 = 0 \qquad \Delta = 4 + 32 = 36$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 6}{2} \left\langle \begin{matrix} 4 \\ -2 \end{matrix} \right.$$

En remplaçant dans (2) :

$x = 4 \Leftrightarrow y = 7 \qquad A(4,7)$

$x = -2 \Leftrightarrow y = -5 \qquad B(-2,-5)$



7. Construire les paraboles $y = -x^2 + 2x$ et $y = 2x^2 + 7x + 2$ (cf page suivante)

(a) Déterminer les points d'intersection des deux courbes ;

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x \\ y = 2x^2 + 7x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ -x^2 + 2x = 2x^2 + 7x + 2 \quad (*) \end{cases}$$

$(*)$ $3x^2 + 5x + 2 = 0$ $\quad \Delta = 25 - 24 = 1$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{6} \left\langle \begin{array}{l} -\frac{2}{3} \\ -1 \end{array} \right.$$

$x = -\frac{2}{3} \overset{(1)}{\Rightarrow} y = -\frac{16}{9}$ $\quad$ (A)

$x = -1 \overset{(1)}{\Rightarrow} y = -3$ $\quad$ (B)

(b) Résoudre algébriquement et graphiquement l'inéquation $-x^2 + 2x < 0$

$\Leftrightarrow -x(x-2) < 0$

x		0		2	
I_x	$-$	0	$+$	0	$-$

$S :]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

La parabole est sous l'axe Ox sur l'intervalle $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

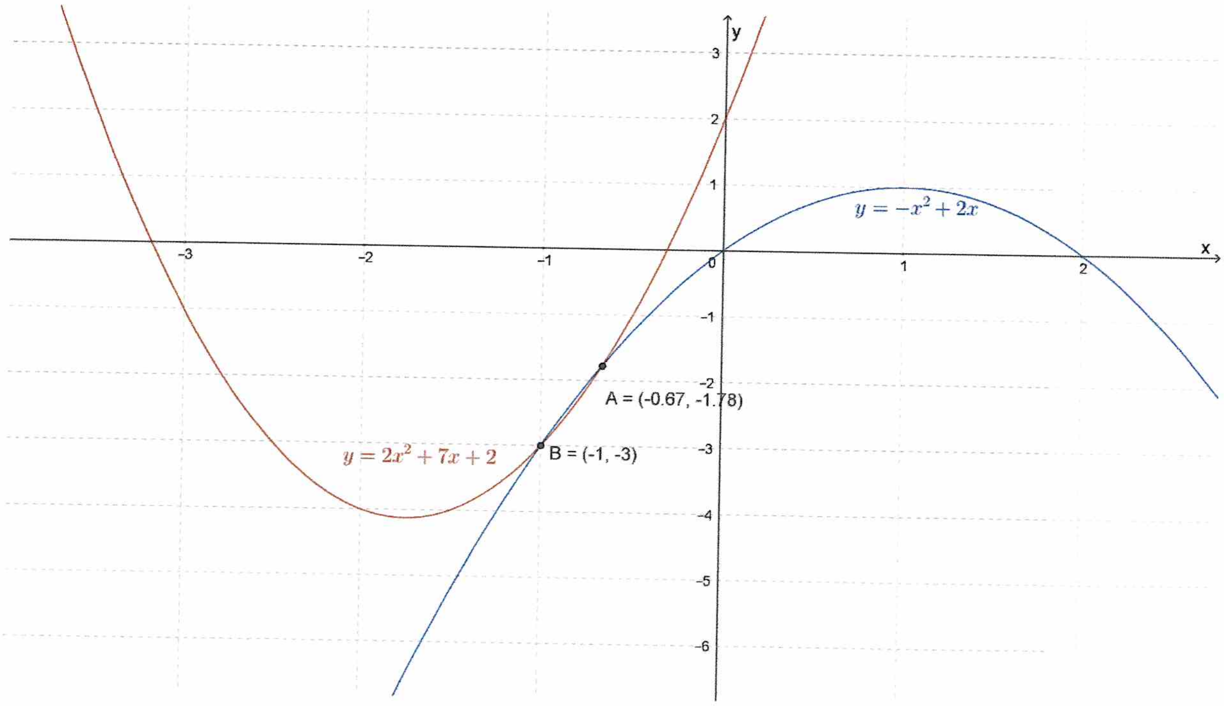
(c) Résoudre algébriquement et graphiquement l'inéquation $-x^2+2x \geq 2x^2+7x+2$

$\Leftrightarrow \quad 3x^2+5x+2 \leq 0$

x		-1		$-\frac{2}{3}$	
I_x	$+$	0	$-$	0	$+$

$S : \left[-1, -\frac{2}{3}\right]$.

La parabole bleue est au dessus de la rouge sur l'intervalle $\left[-1, -\frac{2}{3}\right]$



8. Soit $P \equiv y = -x^2 + kx$. Déterminer la valeur de k pour que la droite $d \equiv y + x - 4 = 0$ soit tangente à P

Le système $\begin{cases} y = -x^2 + kx \\ y + x - 4 = 0 \end{cases}$ a une solution

$\Leftrightarrow \begin{cases} (-x+4) = -x^2 + kx \quad (*) \\ y = -x + 4 \end{cases}$

$(*) \quad -x^2 + kx + x - 4 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + (k+1)x - 4 = 0$

Cette équation donne les abscisses des pts d'$\cap$ entre P et d. On veut 1 sol (tangence)

$\to \Delta = 0$

$$\begin{aligned} \Delta &= (k+1)^2 - 4(-1)(-4) \\ &= k^2 + 2k + 1 - 16 \\ &= k^2 + 2k - 15 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\Delta_k = 4 + 60 = 64$

$k_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 8}{2} \left\langle \begin{matrix} 3 \\ -5 \end{matrix} \right.$

$S : \{-5, 3\}$

9. Ecrire l'équation de la tangente à la parabole d'équation $y = -2x^2 - x + 1$ en son point d'abscisse $-\frac{1}{2}$. Vérifier graphiquement le résultat.

$A\left(-\frac{1}{2}, ?\right) \in P \Leftrightarrow y = -2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 1$

$= 1$

$\rightarrow A : \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

$t \equiv y - 1 = m\left(x + \frac{1}{2}\right)$

$t \cap P \Rightarrow 1$ point

$\begin{cases} y = mx + \frac{1}{2}m + 1 \\ y = -2x^2 - x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ mx + \frac{1}{2}m + 1 = -2x^2 - x + 1 \end{cases}$ (*)

(*) $-2x^2 - mx - x - \frac{1}{2}m = 0$

$\Leftrightarrow -2x^2 - (m+1)x - \frac{1}{2}m = 0$

$\Delta = (m+1)^2 - 4(-2)\left(-\frac{1}{2}m\right)$

$= m^2 + 2m + 1 - 4m$

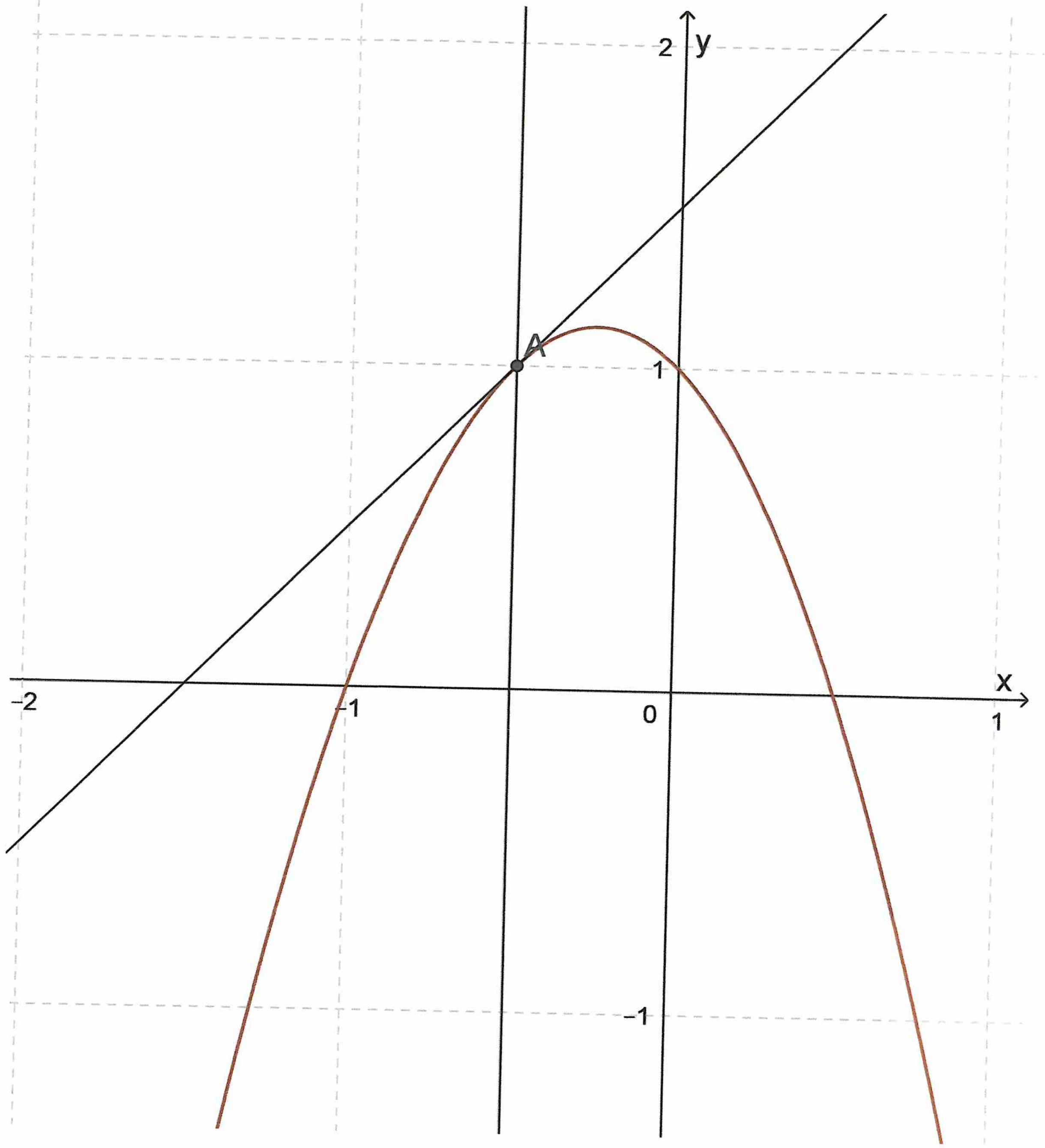
$= m^2 - 2m + 1$

$= (m-1)^2$

$= 0 \Leftrightarrow m = 1$

$t \equiv y = x + \frac{1}{2} + 1$

$\Leftrightarrow t \equiv y = x + \frac{3}{2}$



y
x
A
2
1
0
−1
−2
−1
0
1