Cercle trigonométrique : Solutions

1. Sans utiliser la calculatrice, donner le ***signe*** des nombres trigonométriques suivants ; justifier à l'aide du cercle trigonométrique.

   (a) $\cos 250°$ négatif

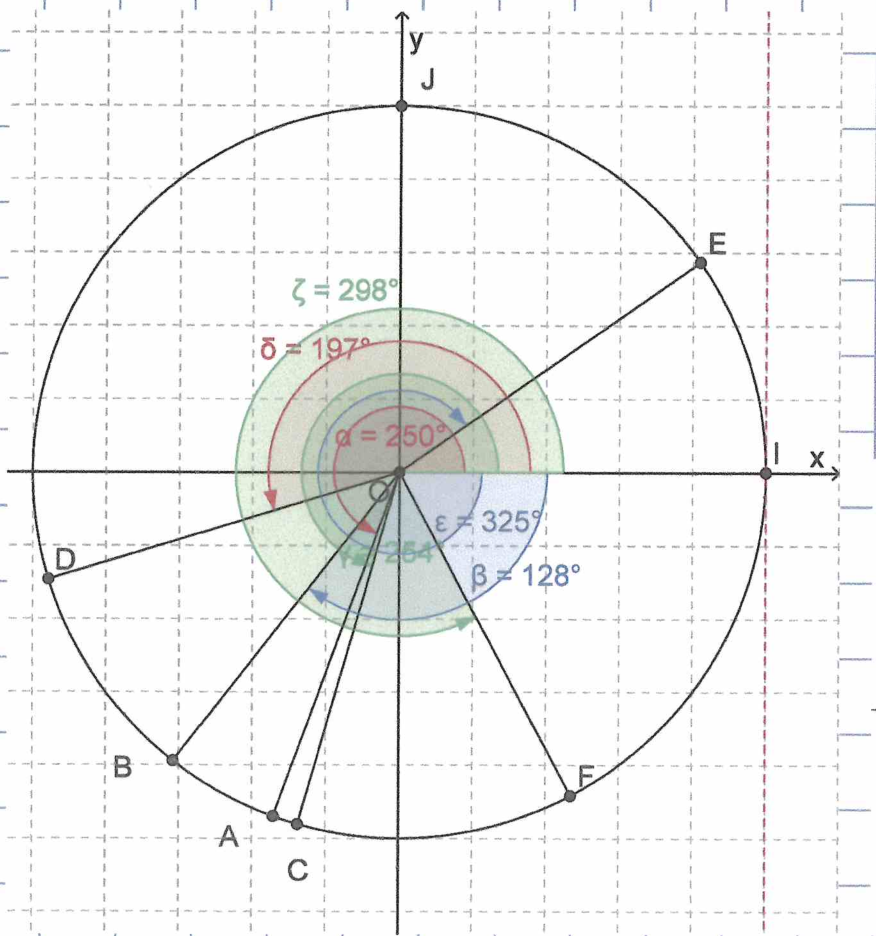
   (b) $\tan -128°$ positif

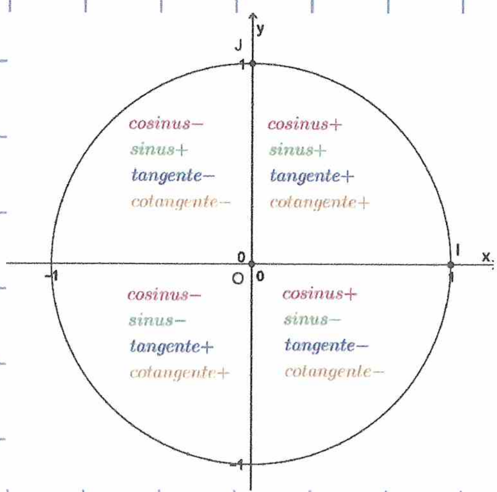
   (c) $\sin 254°$ négatif

   (d) $\cot 197°$ positif

   (e) $\cos(-325°)$ positif

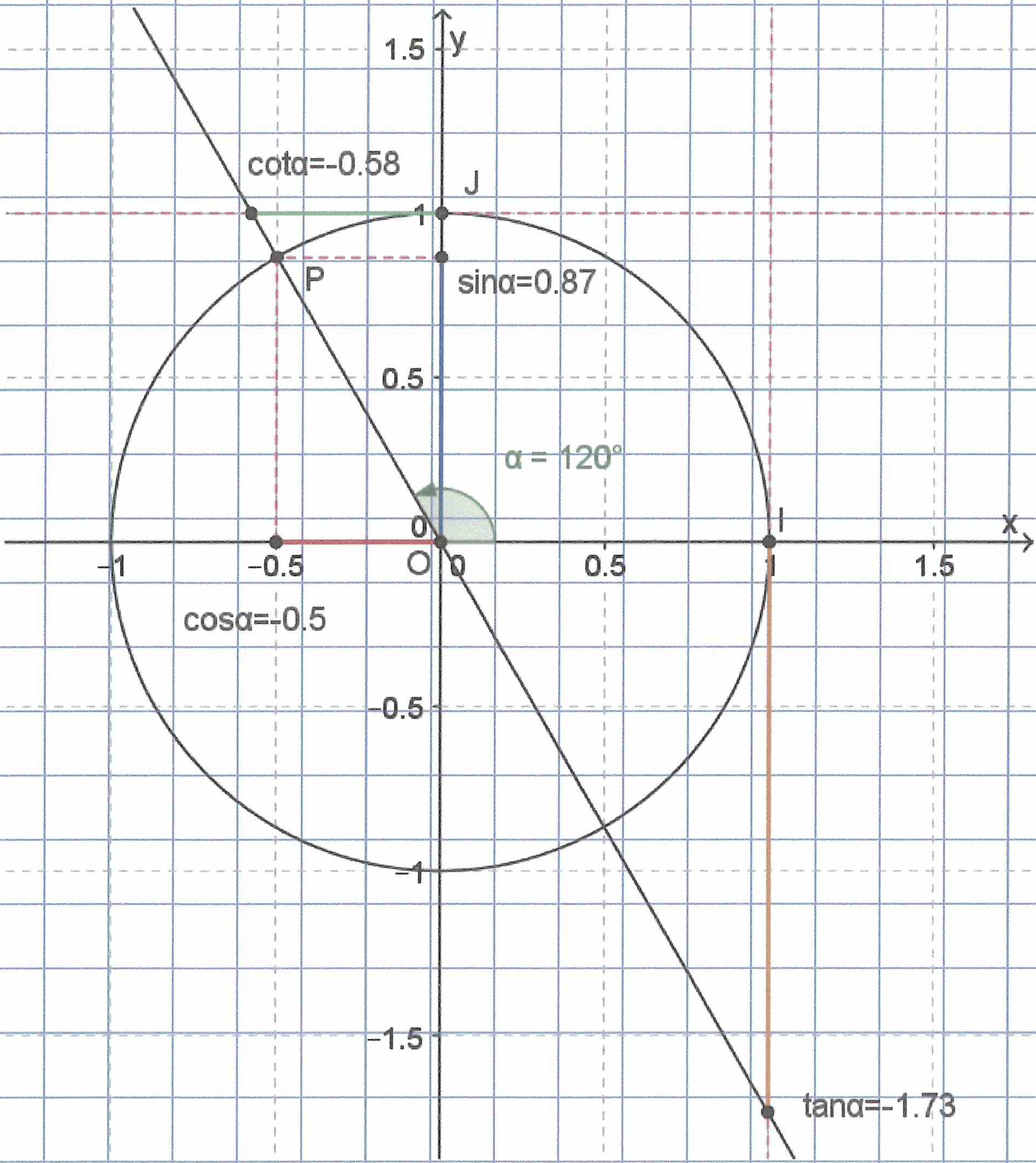
   (f) $\cot 298°$ négatif





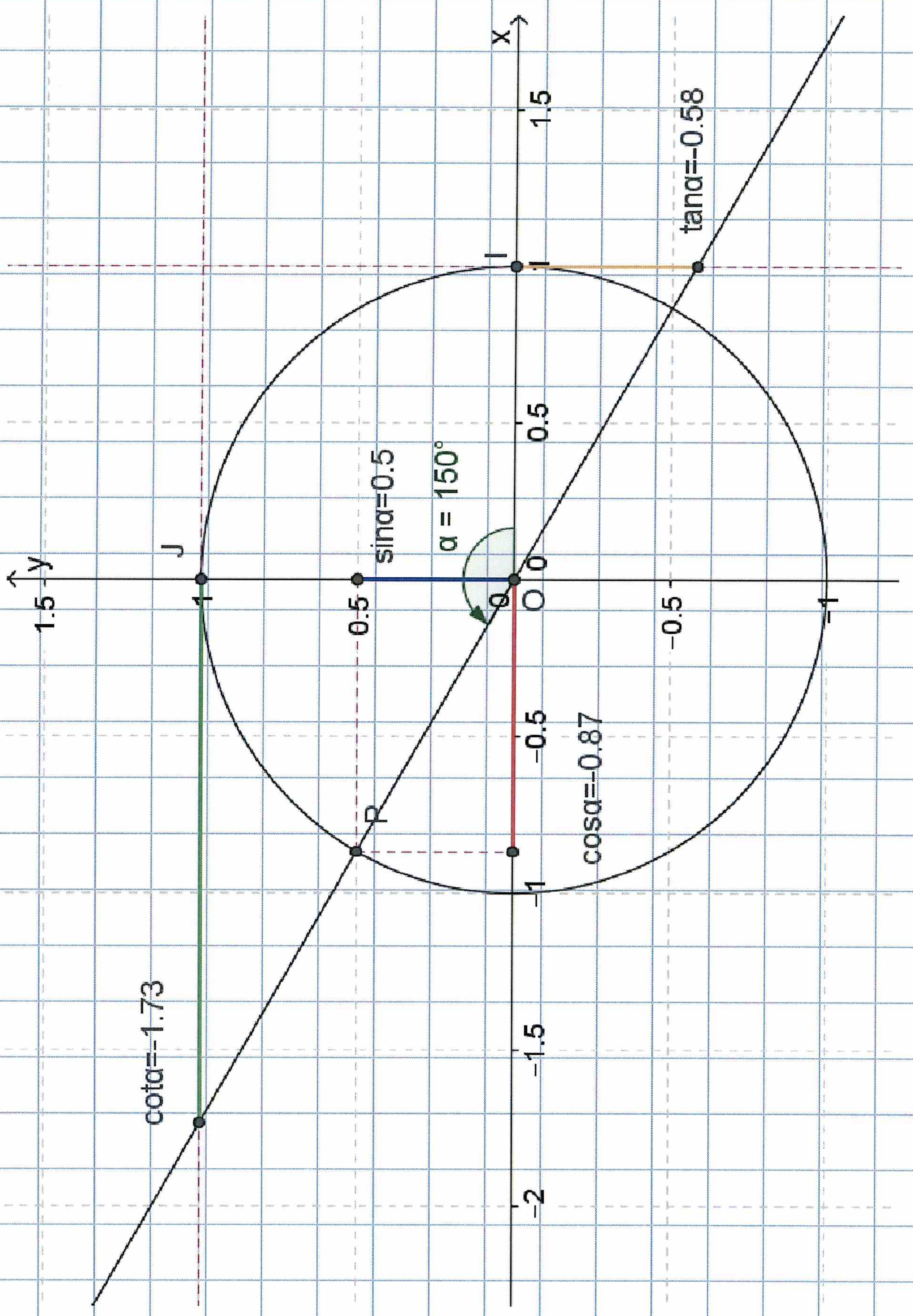
2. Dessiner un cercle trigonométrique de 5 cm de rayon. Dans ce cercle, placer les angles suivants et déterminer une valeurs approchées des nombres trigonométriques de ces angles [1]. Vérifier à l'aide de la calculatrice les résultats.

(a) 120°

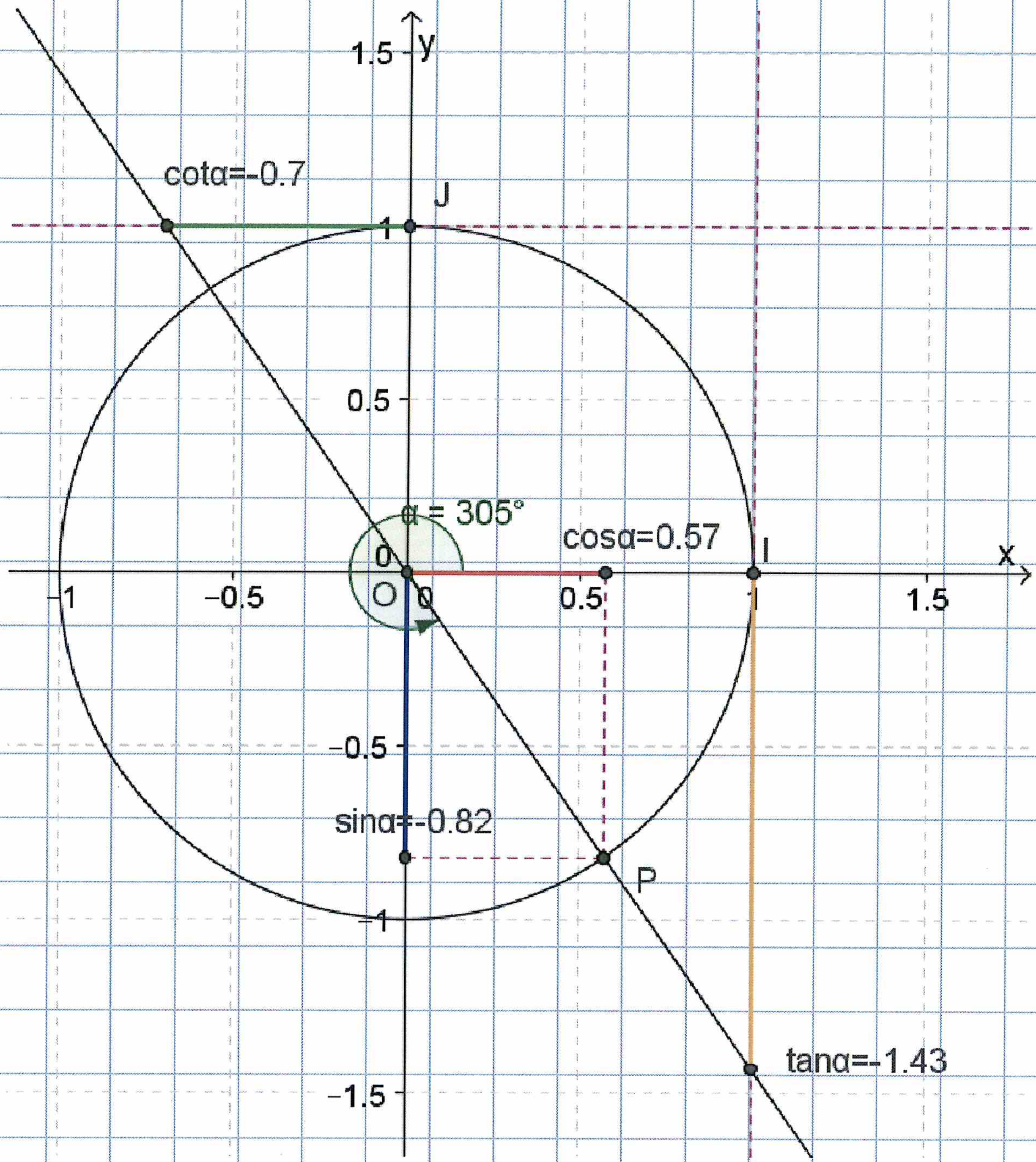


1. Il est conseillé de faire un cercle par angle

(b) -210°

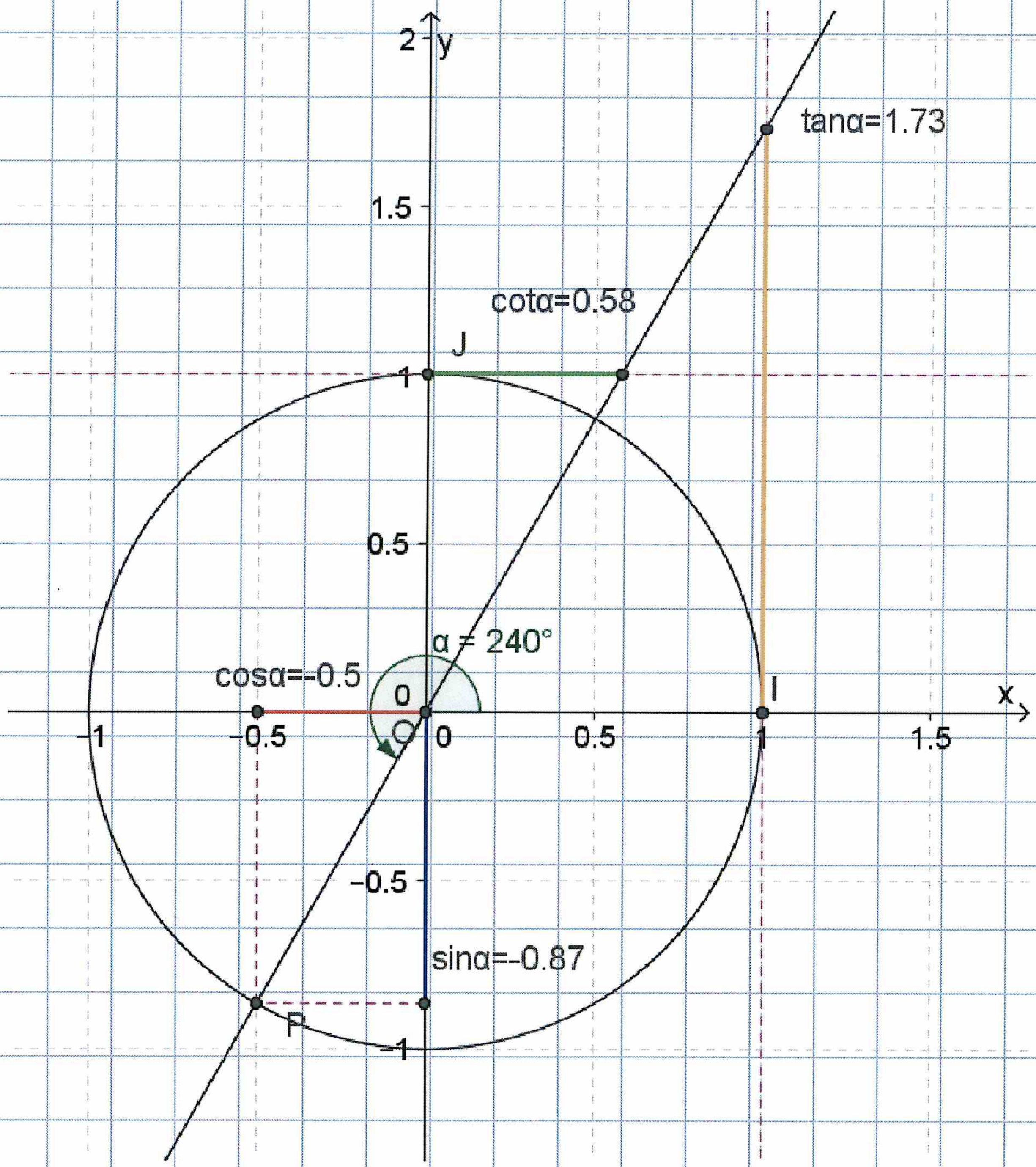


(c) 305°



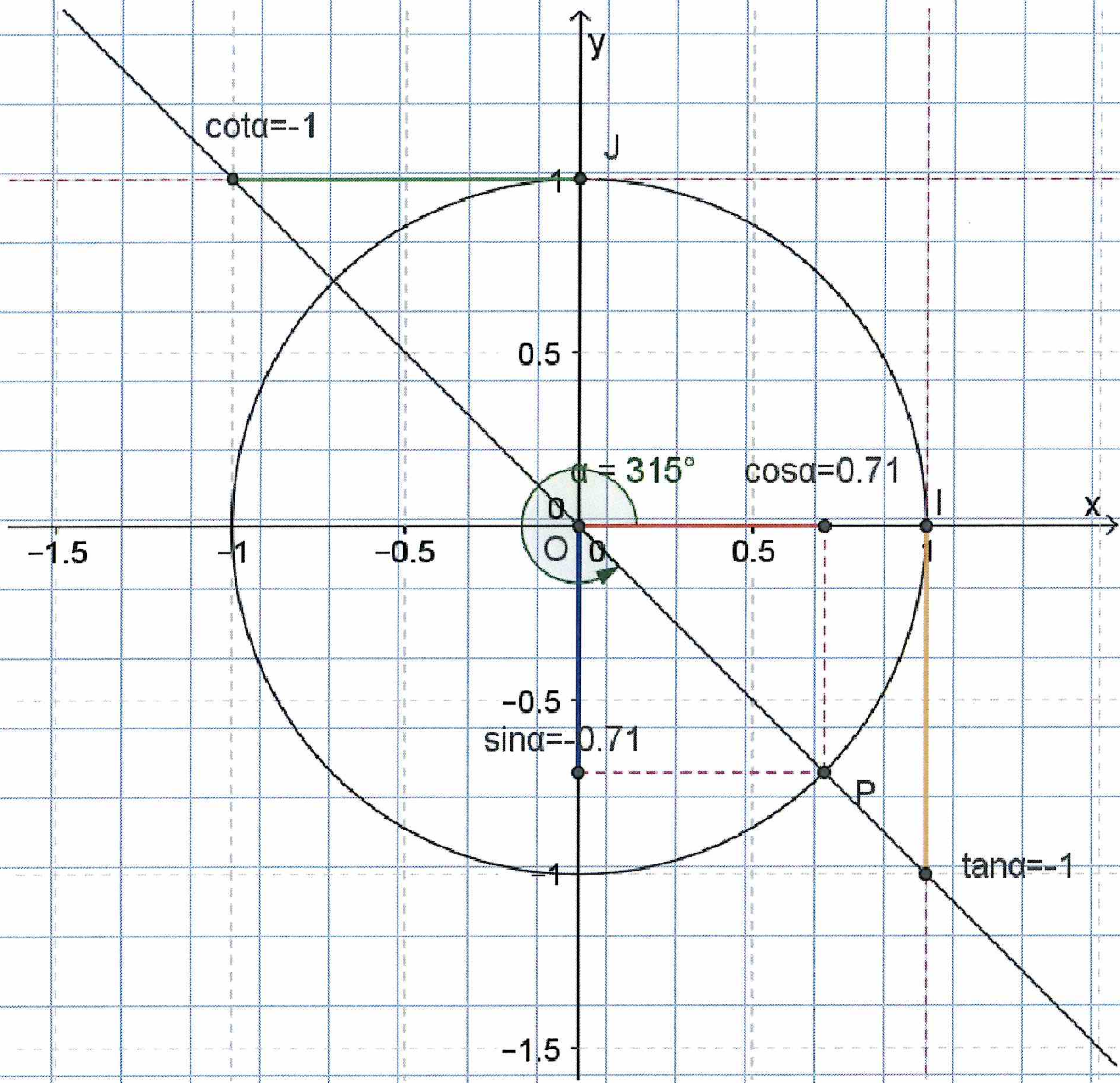
y
x
1.5
0.5
−0.5
−1
−1.5
−1
−0.5
0.5
1
1.5
0
J
I
O
P
cotα=-0.7
α = 305°
cosα=0.57
sinα=-0.82
tanα=-1.43

(d) $\frac{4\pi}{3}$

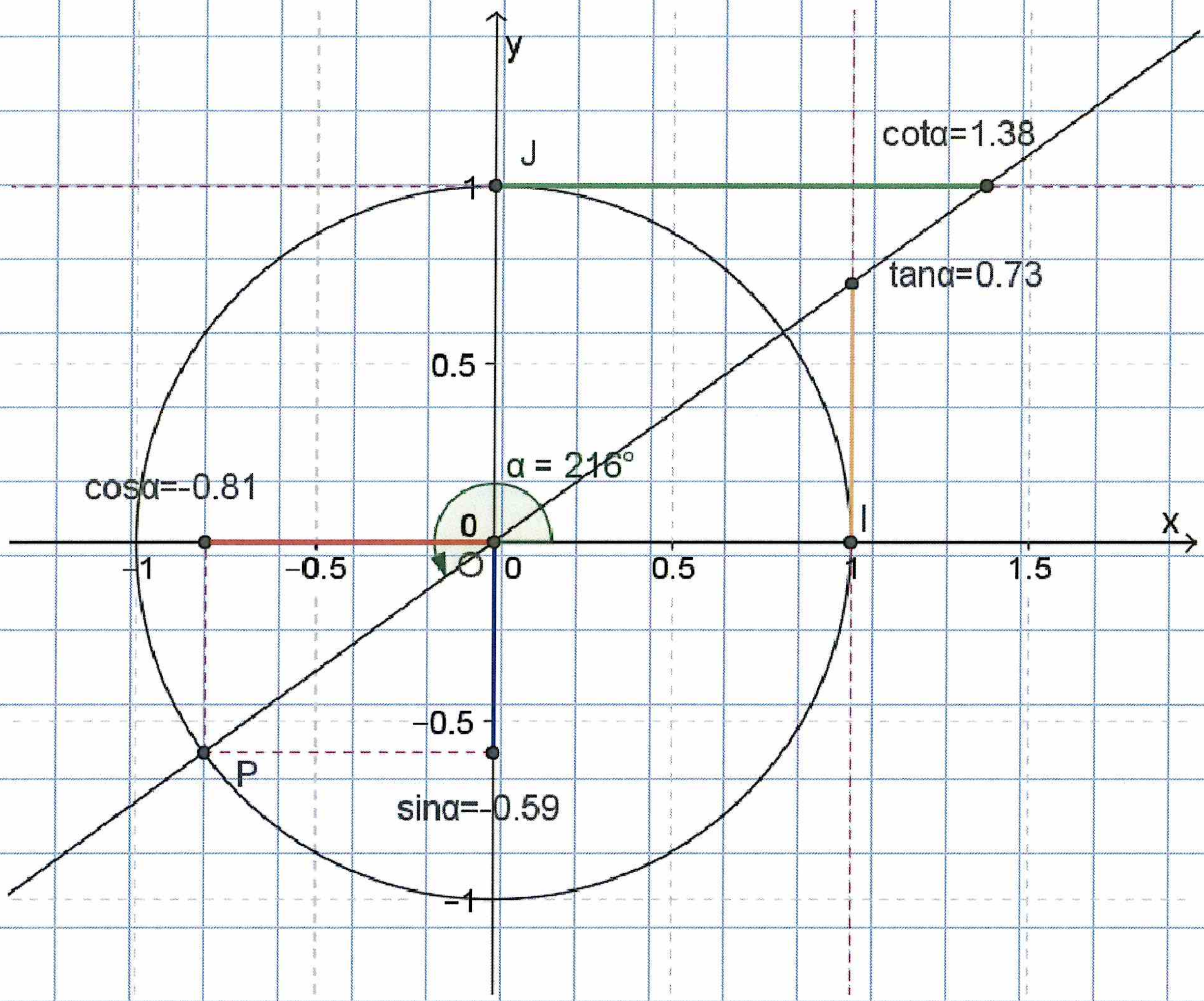


y
x
2
1.5
0.5
−0.5
−1
−1
−0.5
0
0.5
1.5
tanα=1.73
cotα=0.58
J
1
α = 240°
cosα=-0.5
0
O
I
1
sinα=-0.87
P

(e) $\frac{7\pi}{4}$

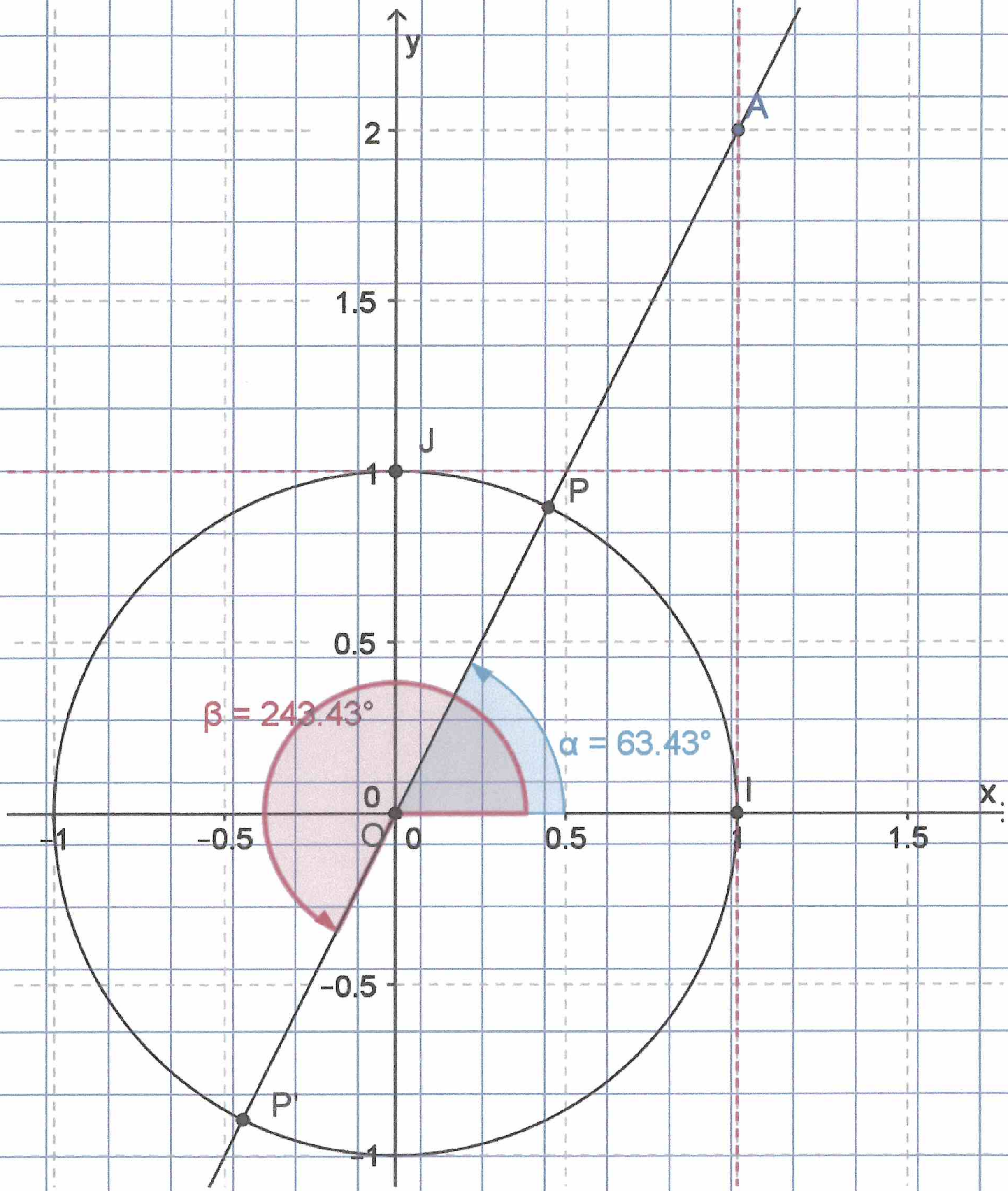


(f) $-\frac{4\pi}{5}$

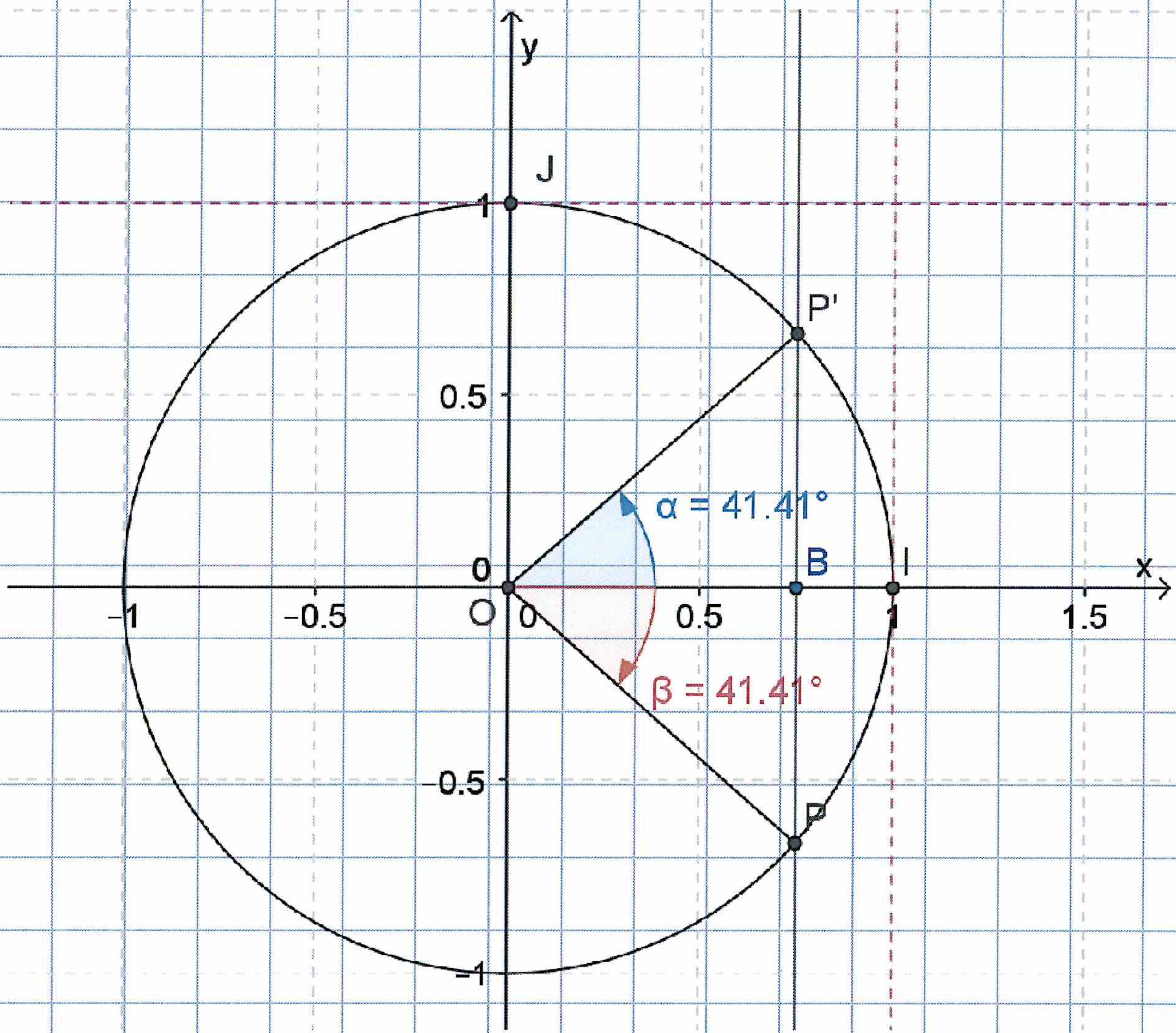


3. Construire un cercle trigonométrique de rayon 5 cm. Déterminer, à l'aide de ce cercle, l'amplitude les angles α tels que :

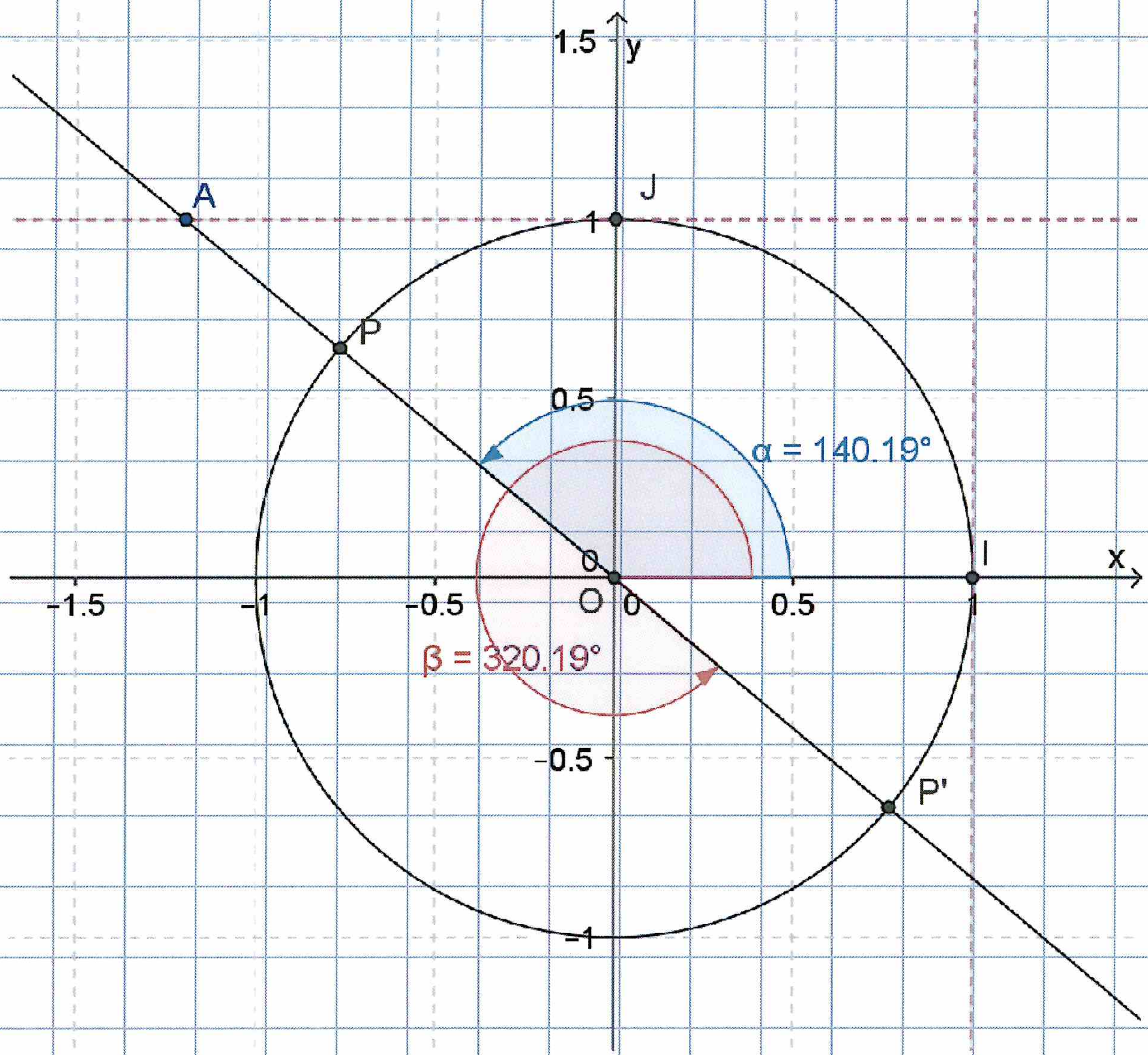
(a) $\tan \alpha = 2$



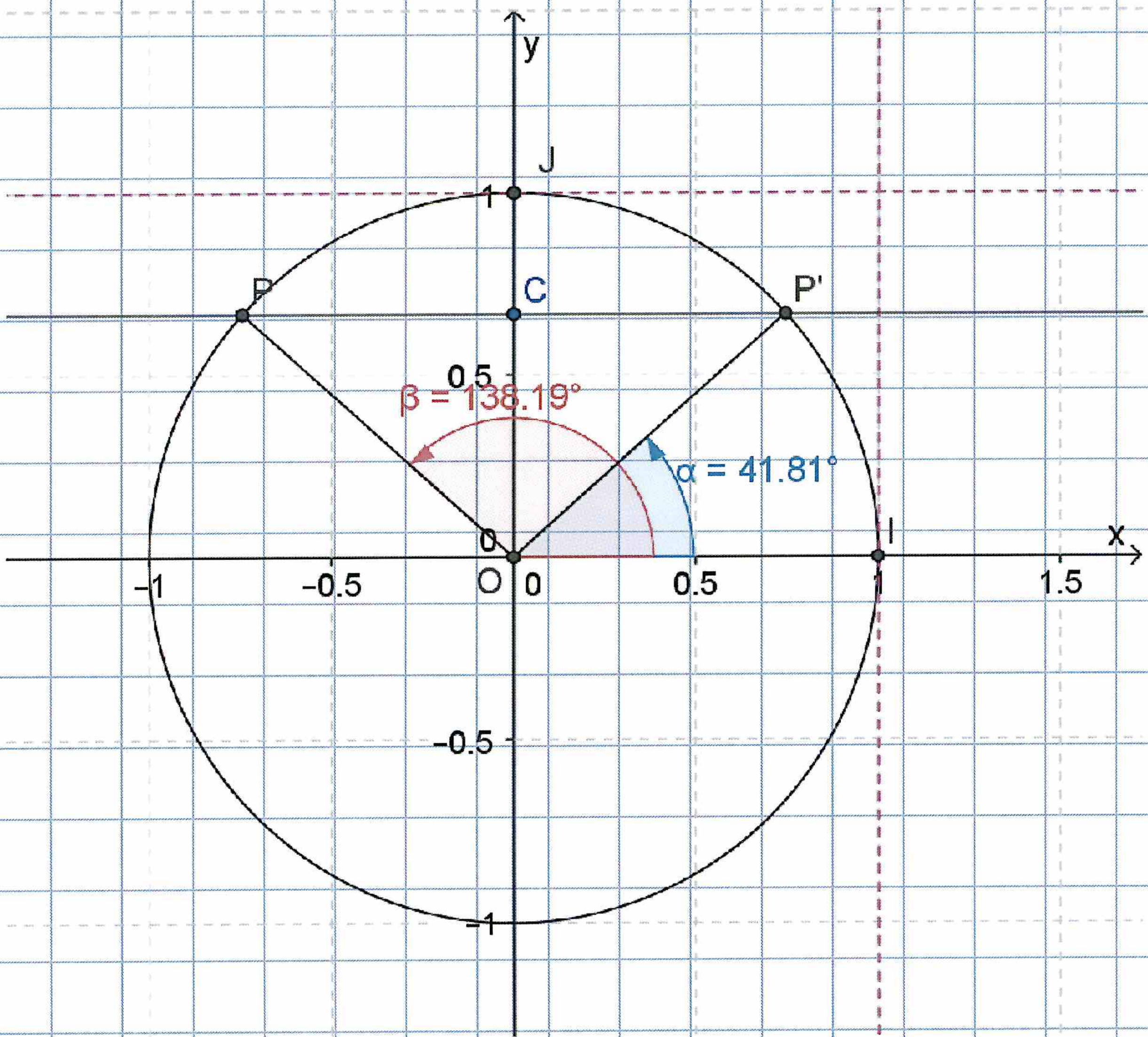
(b) $\cos\alpha = 0.75$



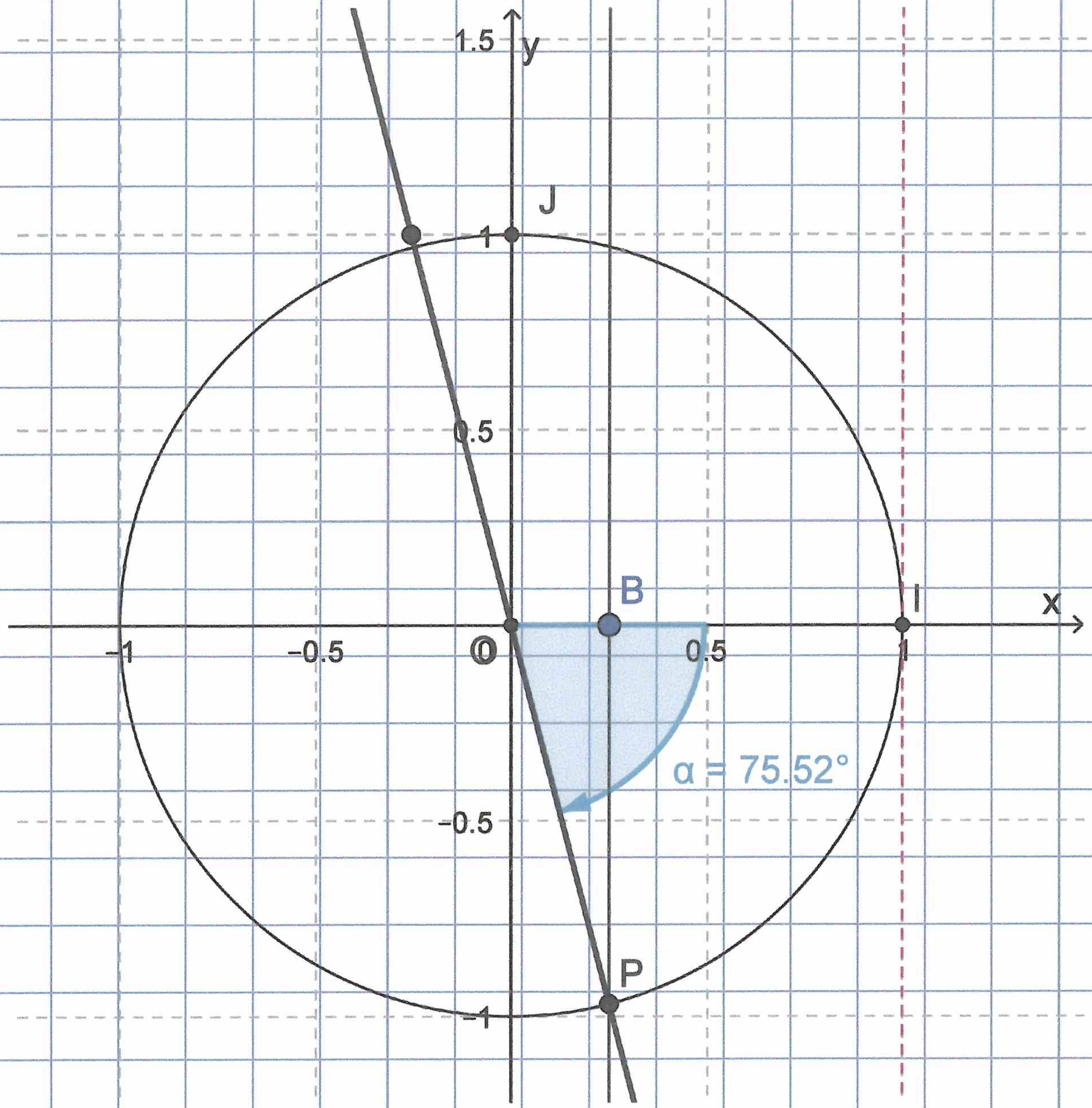
(c) $\cot\alpha = -\frac{6}{5}$



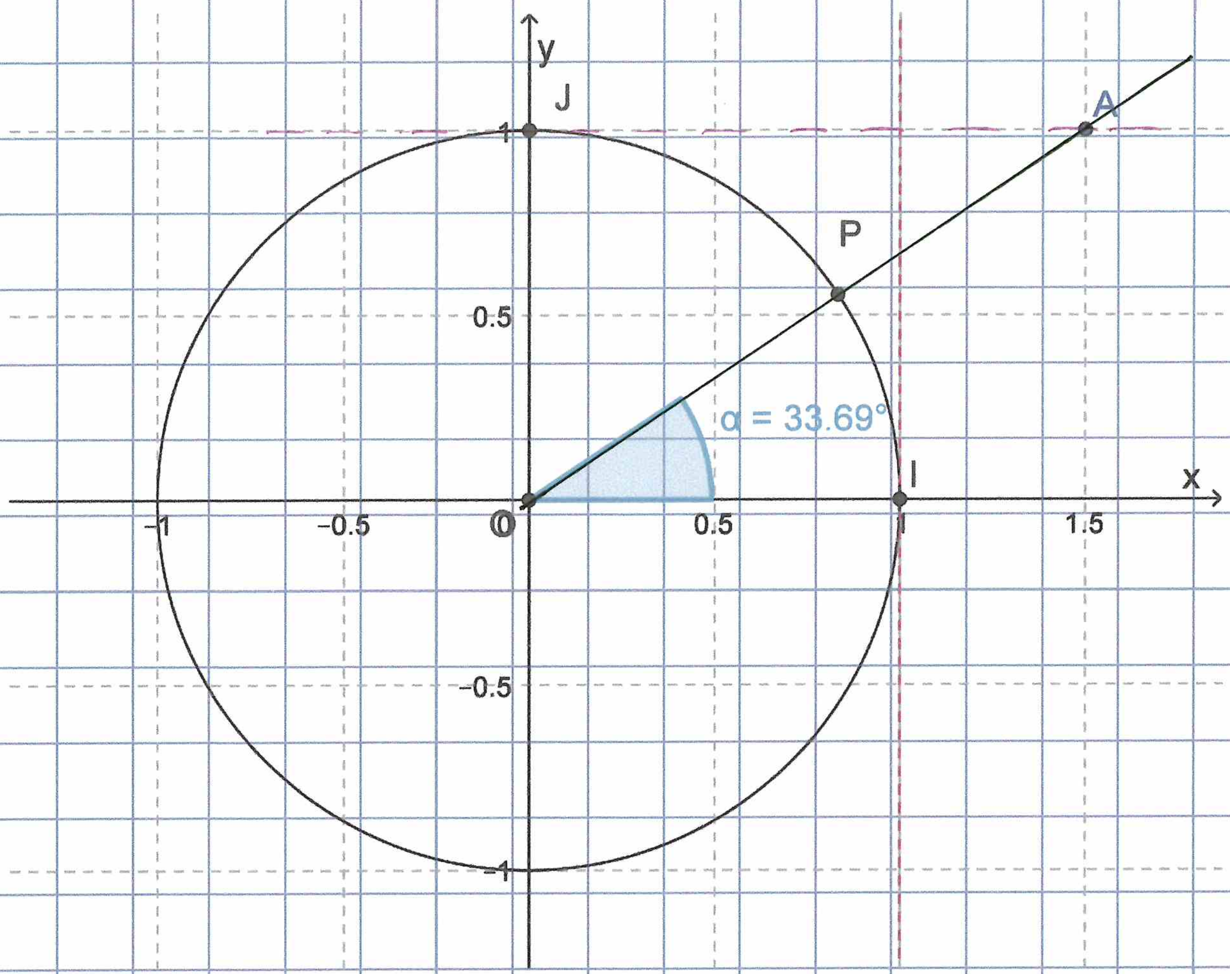
(d) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$



(e) la cotangente est négative et dont le cosinus vaut 0,25 ;



(f) le sinus est positif et dont la cotangente vaut 1,5 ;



4. Vrai ou faux ? Si la réponse est fausse, la corriger. Justifier les réponses à l'aide du cercle trigonométrique.

(a) Si $90° < \alpha < 180°$ alors $\sin\alpha$ est positif ;

vrai car $\alpha \in Q_{II}$

(b) Si $90° < \alpha < 180°$ alors $\tan\alpha$ est négatif ;

vrai car $\alpha \in Q_{II}$

(c) Si $\underbrace{270° < \alpha < 180°}$ alors $\cos\alpha$ est négatif ;

↳ ne veut rien dire

si $180° < \alpha < 270°$, le $\cos\alpha$ est négatif

(d) Si $270° < \alpha < 360°$ alors $\tan\alpha$ est positif ;

Dans Q_{IV}, la tangente est négative

(e) Si $\sin\alpha < 0$ et $\cos\alpha > 0$ alors α est dans le deuxième quadrant ;

Dans Q_{II} c'est $\cos\alpha < 0$ et $\sin\alpha > 0$

Ici, l'affirmation est vrai dans Q_{IV}

(f) Si $\sin\alpha < 0$ et $\tan\alpha > 0$ alors α est dans le deuxième quadrant ;

Non, dans Q_{II} $\sin\alpha > 0$ et $\tan\alpha < 0$.
C'est dans Q_{III} que la première partie de l'affirmation est vraie

(g) Si $\cos\alpha = 0,7$ alors α peut être un angle du quatrième quadrant ;

vrai ($\cos\alpha > 0$ dans Q_{IV})

(h) Si $\sin\alpha = \frac{3}{4}$ alors α peut être un angle du quatrième quadrant ;

Non, dans Q_{IV} $\sin\alpha < 0 \rightarrow \sin\alpha = -\frac{3}{4}$

(i) Si $\tan\alpha = -0,7$ alors α peut être un angle du troisième quadrant.

Non dans Q_{III}, $\tan\alpha > 0 \rightarrow \tan\alpha = 0,7$

5. Antoine a résolu des exercices relatifs à la relation fondamentale de la trigonométrie. Chercher les éventuelles erreurs.

(a) x est un angle du premier quadrant, $\cos x = \frac{2}{5}$ et $\sin x = \frac{3}{5}$;

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\Leftrightarrow \frac{4}{25} + \frac{9}{25} \neq 1 \Rightarrow$ faux

Par contre dans Q_I, $\cos x$ et $\sin x$ sont positifs

(b) x est un angle du deuxième quadrant, $\cos x = \frac{\sqrt{15}}{4}$ et $\sin x = \frac{1}{4}$;

Dans Q_{II}, $\cos x < 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$

Par contre $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\Leftrightarrow \frac{15}{16} + \frac{1}{16} = 1$ (ok)

(c) $90° < x < 180°$, $\sin x = \frac{2}{3}$ et $\cot x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

On est dans Q_{II} et les signes sont justes.

Vérifions de $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\Leftrightarrow \frac{4}{9} + \frac{5}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{16+45}{36} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{61}{36} \neq 1 \rightarrow$ les valeurs sont fausses

6. Déterminer les nombres trigonométriques de x sachant que :

(a) $\cos x = \dfrac{1}{2}$ et $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$;

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} + \sin^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4}$$

car $x \in Q_I$

$$\Leftrightarrow \sin x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow \sin x = + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \dfrac{\cancel{2}}{1} = \sqrt{3}$

- $\cot x = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

- $\cos x = \dfrac{1}{2}$

$\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan x = \sqrt{3}$

$\cot x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(b) $\sin x = \frac{4}{13}$ et $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$;

. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$= 1 - \frac{16}{169}$

$= \frac{153}{169}$

$\Leftrightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{153}{169}} = \cancel{\pm} - \frac{3\sqrt{17}}{13}$

$\hookrightarrow \cos x \in Q_{II}$

. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{4}{13}}{-\frac{3\sqrt{17}}{13}} = \frac{4}{-3\sqrt{17}} \cdot \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$

$= -\frac{4\sqrt{17}}{51}$

. $\cot x = \frac{1}{\tan x} = -\frac{3\sqrt{17}}{4}$

. $\sin x = \frac{4}{13}$

$\cos x = -\frac{3\sqrt{17}}{13}$

$\tan x = \frac{-4\sqrt{17}}{51}$

$\cot x = -\frac{3\sqrt{17}}{4}$

(c) $\tan x = 2$ et x est dans le $3^{\text{ème}}$ quadrant ;

- $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow 1 + 4 = \dfrac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{5}$

$\Leftrightarrow \cos x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{5}} = \cancel{+}\,- \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{5} = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\to \cos x \in Q_{III}$

- $\cot x = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{1}{2}$

- $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \sin x = \tan x \cdot \cos x$

$\Leftrightarrow \sin x = 2\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right) \Leftrightarrow \sin x = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

- $\sin x = \dfrac{-2\sqrt{5}}{5}$

$\cos x = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\tan x = 2$

$\cot x = \dfrac{1}{2}$

(d) $\cot x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et x est dans le $2^{\text{ème}}$ quadrant ;

. $\tan x = \dfrac{1}{\cot x} = -\dfrac{3}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -3$

. $1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x} \Leftrightarrow 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{\sin^2 x} \Leftrightarrow \sin^2 x = \dfrac{3}{4}$

car $x \in Q_{\mathrm{II}}$

$\Leftrightarrow \sin x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{4}} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

. $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x} \Leftrightarrow \cos x = \cot x \cdot \sin x$

$\Leftrightarrow \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2}$

. $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos x = -\dfrac{1}{2}$

$\tan x = -\sqrt{3}$

$\cot x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(e) $\cos x = \dfrac{1}{8}$ et x est dans le $4^{\text{ème}}$ quadrant ;

$\bullet\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \iff \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\iff \sin^2 x = 1 - \dfrac{1}{64} \iff \sin^2 x = \dfrac{63}{64}$

$\iff \sin x = \pm\sqrt{\dfrac{63}{64}} = \cancel{+}\ \ominus\ \dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

$\to \cos x \in Q_{\text{IV}}$

$\bullet\ \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \iff \tan x = \dfrac{-\frac{3\sqrt{7}}{8}}{\frac{1}{8}}$

$\iff \tan x = -3\sqrt{7}$

$\bullet\ \cot x = \dfrac{1}{\tan x} = -\dfrac{1}{3\sqrt{7}} \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$

$\iff \cot x = \dfrac{-\sqrt{7}}{21}$

$\bullet\ \sin x = \dfrac{-3\sqrt{7}}{8}$

$\cos x = \dfrac{1}{8}$

$\tan x = -3\sqrt{7}$

$\cot x = -\dfrac{\sqrt{7}}{21}$

7. Simplifier les relations suivantes :

(a) $(1 - \cos a)(1 + \cos a)$

$= 1 - \cos^2 a$ (binômes conjugués)

$= \sin^2 a$ (identité fondamentale)

(b) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$

$$= \frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)+\cos\alpha(1-\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)} \qquad (\text{red à D})$$

$$= \frac{\cos\alpha + \cancel{\cos\alpha\sin\alpha} + \cos\alpha - \cancel{\cos\alpha\sin\alpha}}{1-\sin^2\alpha}$$

(bin. conj)

$$= \frac{2\cancel{\cos\alpha}}{\cos^{\cancel{2}}\alpha} \qquad (\text{id. fond.})$$

$$= \frac{2}{\cos\alpha}$$

(c) $\cos^2 x\,(1+\tan^2 x)$

$= \cancel{\cos^2 x} \cdot \dfrac{1}{\cancel{\cos^2 x}}$ (2^e id. fond)

$= 1$

OU

$= \cos^2 x \left(1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)$ (déf. de $\tan x$)

$= \cos^2 x \;\; \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$ (réd. au D)

$= \cancel{\cos^2 x} \;\; \dfrac{1}{\cancel{\cos^2 x}}$ (id. fond)

$= 1$

(d) $\left(\frac{1}{\tan\varphi}+\frac{1}{\cot\varphi}\right)\sin\varphi\cos\varphi$

$$= \left(\frac{1}{\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}} + \frac{1}{\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}}\right)\sin\varphi\cos\varphi$$

(déf. de tan φ et cot φ)

$$= \left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)\sin\varphi\cos\varphi$$

(ppté des frac.)

$$= \frac{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}\sin\varphi\cos\varphi$$

(réd. m̂ D)

$$= \frac{1}{\cancel{\sin\varphi}\,\cancel{\cos\varphi}}\cdot\cancel{\sin\varphi}\,\cancel{\cos\varphi}$$

(id. fond.)

$$= 1$$

(e) $(1+\cot^2 a)(1-\cos^2 a)$

$= \dfrac{1}{\cancel{\sin^2 \alpha}} \cdot \cancel{\sin^2 \alpha}$ (3^e et 1^e id. fond.)

$= 1$

$\boxed{\text{OU}}$

$= \left(1 + \dfrac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}\right)(1-\cos^2 \alpha)$ (déf. de $\cot \alpha$)

$= \dfrac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}(1-\cos^2 \alpha)$ (réd. m. D)

$= \dfrac{1}{\sin^2 \alpha}(1-\cos^2 \alpha)$ (id. fond.)

$= \dfrac{1}{\cancel{\sin^2 \alpha}} \cancel{\sin^2 \alpha}$ (id. fond.)

$= 1$

(f) $(\sin a + \cos a)^2 + (\sin a - \cos a)^2$

$$= \sin^2\alpha + \cancel{2\sin\alpha\cos\alpha} + \cos^2\alpha$$
$$\quad + \sin^2\alpha - \cancel{2\sin\alpha\cos\alpha} + \cos^2\alpha$$

(pdts rmq.)

$$= 2\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha$$

$$= 2\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)$$

(mise en évidence de 2)

$$= 2$$

(id. fond.)

(g) $\sin^6 a + 3\sin^2 a\cos^2 a + \cos^6 a$

$= (\sin^6 a + \cos^6 a) + 3\sin^2 a\cos^2 a$

$= (\sin^2 a + \cos^2 a)(\sin^4 a - \sin^2 a\cos^2 a + \cos^4 a)$
$+ 3\sin^2 a\cos^2 a$

(pdt. nmq. 3^e d°)
$(a^3 + b^3)$

$= \sin^4 a - \sin^2 a\cos^2 a + \cos^4 a + 3\sin^2 a\cos^2 a$
$= \sin^4 a + 2\sin^2 a\cos^2 a + \cos^4 a$
$= (\sin^2 a + \cos^2 a)^2$

(pdt. nmq)

$= 1$

(id. fond)

(b) $3(\sin^4 a + \cos^4 a) - 2(\sin^6 a + \cos^6 a)$

$= 3\sin^4 a + 3\cos^4 a - 2\cancel{(\sin^2 a + \cos^2 a)}(\sin^4 a - \sin^2 a \cos^2 a \ldots$

$\ldots + \cos^4 a)$

[(pdt rmq 3^e d° + id. fond)

$= 3\sin^4 + 3\cos^4 a - 2\sin^4 a + 2\sin^2 a \cos^2 a - 2\cos^4 a$

$= \sin^4 a + 2\sin^2 a \cos^2 a + \cos^4 a$

$= (\sin^2 a + \cos^2 a)^2$

(pdt. rmq.)

$= 1$

(id. fond.)

8. Si $x = a\cos u - b\sin u$ et $y = a\sin u + b\cos u$, calculer $E = x^2 + y^2$

$$E = (a\cos u - b\sin u)^2 + (a\sin u + b\cos u)^2$$

$$= a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u \cancel{- 2ab\sin u\cos u} \ldots$$

$$+ a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u \cancel{+ 2ab\sin u\cos u}$$

$$= (a^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u) + (b^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u)$$

$$= a^2\underbrace{(\cos^2 u + \sin^2 u)}_{1} + b^2\underbrace{(\sin^2 u + \cos^2 u)}_{1}$$

$$= a^2 + b^2$$

9 Si $x = a\cos u$, $y = a\sin u\cos v$ et $z = a\sin u\sin v$, montrer que $E = x^2 + y^2 + z^2$ est indépendante de u et v

$$E = a^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u\cos^2 v + a^2\sin^2 u\sin^2 v$$

$$= a^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u\,(\underbrace{\cos^2 v + \sin^2 v}_{1})$$

$$= a^2(\underbrace{\cos^2 u + \sin^2 u}_{1})$$

$$= a^2$$

10. Etablir les identités trigonométriques suivantes

(a) $\sin^4 a - \cos^4 a = \sin^2 a - \cos^2 a$

$$\begin{aligned} I &= \sin^4 a - \cos^4 a \\ &= (\sin^2 a - \cos^2 a)\underbrace{(\sin^2 a + \cos^2 a)}_{1} \quad \text{fact.} \\ &= \sin^2 a - \cos^2 a \\ &= \underline{II} \end{aligned}$$

(b) $\tan^2 a - \tan^2 b = \dfrac{1}{\cos^2 a} - \dfrac{1}{\cos^2 b}$

$$\mathrm{I} = \tan^2 a - \tan^2 b$$

$$= \left(\frac{1}{\cos^2 a} - 1\right) - \left(\frac{1}{\cos^2 b} - 1\right)$$ id. fond 2

$$= \frac{1}{\cos^2 a} - \cancel{1} - \frac{1}{\cos^2 b} + \cancel{1}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 a} - \frac{1}{\cos^2 b}$$

$$= \mathrm{II}$$

(c) $\dfrac{\cos a}{1-\tan a}+\dfrac{\sin a}{1-\cot a}=\sin a+\cos a$

$$I = \frac{\cos a}{1-\frac{\sin a}{\cos a}} + \frac{\sin a}{1-\frac{\cos a}{\sin a}}$$ déf de tan a et cot a

$$= \frac{\cos a}{\frac{\cos a-\sin a}{\cos a}} + \frac{\sin a}{\frac{\sin a-\cos a}{\sin a}}$$ réd. au D

$$= \frac{\cos^2 a}{\cos a-\sin a} \mp \frac{\sin^2 a}{-\sin a+\cos a}$$ div. de fractions

changement de signe de D_2

$$= \frac{\cos^2 a-\sin^2 a}{\cos a-\sin a}$$

$$= \frac{\cancel{(\cos a-\sin a)}(\cos a+\sin a)}{\cancel{\cos a-\sin a}}$$ fact.

$$= \cos a+\sin a$$

$$= \boxed{II}$$

(d) $\dfrac{\tan a}{\tan b} = \dfrac{\tan a + \cot b}{\tan b + \cot a}$

$$\mathrm{II} = \frac{\tan a + \frac{1}{\tan b}}{\tan b + \frac{1}{\tan a}}$$

déf. de cot

$$= \frac{\frac{\tan a \tan b + 1}{\tan b}}{\frac{\tan a \tan b + 1}{\tan a}}$$

réd au m̂ D

$$= \frac{\cancel{\tan a \tan b + 1}}{\tan b} \cdot \frac{\tan a}{\cancel{\tan a \tan b + 1}}$$

div. de fractions

$$= \frac{\tan a}{\tan b}$$

$$= \mathrm{I}$$

(e) $\dfrac{\sin^2 a + \sin a \cos a + \cos^2 a}{cos^2 a} = 1 + \tan a + \tan^2 a$

$$I = \frac{\sin^2 a + \sin a \cos a + \cos^2 a}{\cos^2 a}$$

$$= \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + \frac{\sin a \cancel{\cos a}}{\cos^{\cancel{2}} a} + \frac{\cancel{\cos^2 a}}{\cancel{\cos^2 a}}$$ pptè de fractions

$$= \tan^2 a + \tan a + 1$$ def de tan a

$$= II$$

(f) $\dfrac{\sin^3 a+\cos^3 a}{\sin a+\cos a}+\dfrac{\sin^3 a-\cos^3 a}{\sin a-\cos a}=2$

$$I = \frac{\cancel{(\sin a+\cos a)}\,(\overbrace{\sin^2 a - \sin a\cos a + \cos^2 a}^{1})}{\cancel{\sin a+\cos a}} + \dots$$

$$\dots \frac{\cancel{(\sin a-\cos a)}\,(\overbrace{\sin^2 a + \sin a\cos a + \cos^2 a}^{1})}{\cancel{\sin a-\cos a}}$$

pdt rmq 3^e degré

$$= 1 - \cancel{\sin a\cos a} + 1 + \cancel{\sin a}\cos a$$

simpl. + id fond.

$$= 2$$

$$= II$$

(g) $\dfrac{\sin^2 a - \cos^2 b}{\sin^2 a \sin^2 b} = 1 - \cot^2 a \cot^2 b$

$$\mathrm{II} = 1 - \frac{\cos^2 a}{\sin^2 a} \, \frac{\cos^2 b}{\sin^2 b}$$ déf de cot.

$$= \frac{\sin^2 a \, \sin^2 b - \cos^2 a \, \cos^2 b}{\sin^2 a \, \sin^2 b}$$ réd. au m. D

$$= \frac{\sin^2 a \left(1 - \cos^2 b\right) - \left(1 - \sin^2 a\right) \cos^2 b}{\sin^2 a \, \sin^2 b}$$ id. fond 1

$$= \frac{\sin^2 a - \cancel{\sin^2 a \cos^2 b} - \cos^2 b + \cancel{\sin^2 a \cos^2 b}}{\sin^2 a \, \sin^2 b}$$

$$= \frac{\sin^2 a - \cos^2 b}{\sin^2 a \, \sin^2 b}$$

$$= \mathrm{I}$$