Chapitre 4: Systèmes d'équations - Théorie

Références:

Cours de 3ème: chapitre 4 paragraphe 4.3.

Système d'équations du premier degré

Définition

Définition: *Un système de deux équations du premier degré à deux inconnues est un ensembe de deux équations dont on recherche une solution commune. Ces deux équations doivent donc être vérifiée en même temps. Ces solutions, si elles existent, sont des couples de réels.*

$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$ est un système d'équations vérifiées pour $x = 1$ et $y = 2$.

Méthode de résolution des systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues

Méthode de substitution

La méthode de substitution consiste à isoler une inconnue d'une équation, de la remplacer dans l'autre. On obtient ainsi un système de deux équations à une inconnue qui peuvent être résolues simplement.
Soit à résoudre le système :

$$\begin{cases} x + 10y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} x + 10y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 10y \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 10y \\ 2(5 - 10y) - y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 10y \\ 10 - 20y - y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 10y \\ -21y = -7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 10y \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

En substituant cette valeur de y issue de la dernière équation dans la première, on obtient :

$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{3} \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

La solution du systèmes est donc : $S = \left\{ \left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{1}{3} \right) \right\}$

Méthode de comparaison

La méthode de comparaison est très similaire à la méthode de substitution. Elle consiste à isoler la même inconnue des deux équations et à égaler les deux valeurs obtenues. Elle est rarement utilisée.

Soit à résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{l} x+10y=5 \\ 2x-y=3 \end{array}\right.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} x+10y=5 \\ 2x-y=3 \end{array}\right. \quad & \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5-10y \\ x=\dfrac{3+y}{2} \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5-10y \\ 5-10y=\dfrac{3+y}{2} \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5-10y \\ 10-20y=3+y \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5-10y \\ -21y=-7 \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5-10y \\ y=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

En substituant cette valeur de y issue de la dernière équation dans la première, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{3} \\ y=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

La solution du systèmes est donc : $S=\left\{\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{1}{3}\right)\right\}$

Méthode par combinaison linéaire

La méthode de combinaison linéaire est basée sur la propriété :"*Si l'on remplace une équation d'un système par une combinaison linéaire des autres équations du système, le système reste inchangé*".

$$\left\{\begin{array}{l} x+10y=5 \\ 2x-y=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \underbrace{2x+20y=10}_{\text{1ère équation} \times 2} \\ \\ \underbrace{-6x+3y=-9}_{\text{2ème équation} \times -3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \underbrace{2x+20y-6x+3y=10-9}_{\text{somme des deux nouvelles équations}} \\ \\ -6x+3y=-9 \end{array}\right.$$

On cherche donc, en multipliant une équation par un coefficient et une autre par une autre, et en sommant les deux nouvelles équations, éliminer un inconnue. Si l'on effectue cette opération sur les trois équations de manière à effectuer la même inconnue, on se ramène à un système de deux équations à eux inconnues.
Soit à résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{l} x+10y=5 \\ 2x-y=3 \end{array}\right.$$

Soit à résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{l} x+10y=5 \\ 2x-y=3 \end{array}\right.$$

On va commencer par éliminer les x. Si l'on multiplie la première équation par 2 et la seconde par -1, on a : On a :

$$\left\{\begin{array}{l} x+10y=5 \\ 2x-y=3 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} 2 \\ -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{\left\{\begin{array}{l} 2x+20y=10 \\ -2x+y=-3 \end{array}\right.}{0x+21y=7 \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{3}}$$

On élimine ensuite les y. Si l'on multiplie la première équation par 1 et la seconde par 10, on a : On a :

$$\left\{\begin{array}{l} x+10y=5 \\ 2x-y=3 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} -1 \\ -10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{\left\{\begin{array}{l} -x-10y=-5 \\ -20x+10y=-30 \end{array}\right.}{-21x+0y=-35 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{3}}$$

La solution du systèmes est donc : $S=\left\{\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{1}{3}\right)\right\}$

On obtient de cette manière directement le résultat. Il est donc clair que cette technique est beaucoup plus rapide que la précédente et ne fait apparaitre des fractions qu'à la dernière étape (et limite donc les risques d'erreurs !).

Comment choisir les coefficients multiplicatifs ?

$$\left\{\begin{array}{l} \boxed{}\,x + 10y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|c|c} 2 & -1 \\ \boxed{-}1 & -10 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x + \boxed{10}y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|c|c} 2 & -1 \\ -1 & \boxed{-}10 \end{array}$$

Résolution graphique

Les deux équations du système peuvent être considérées comme deux équations de droites dans un repère cartésien du plan.
Trois cas peuvent se présenter :

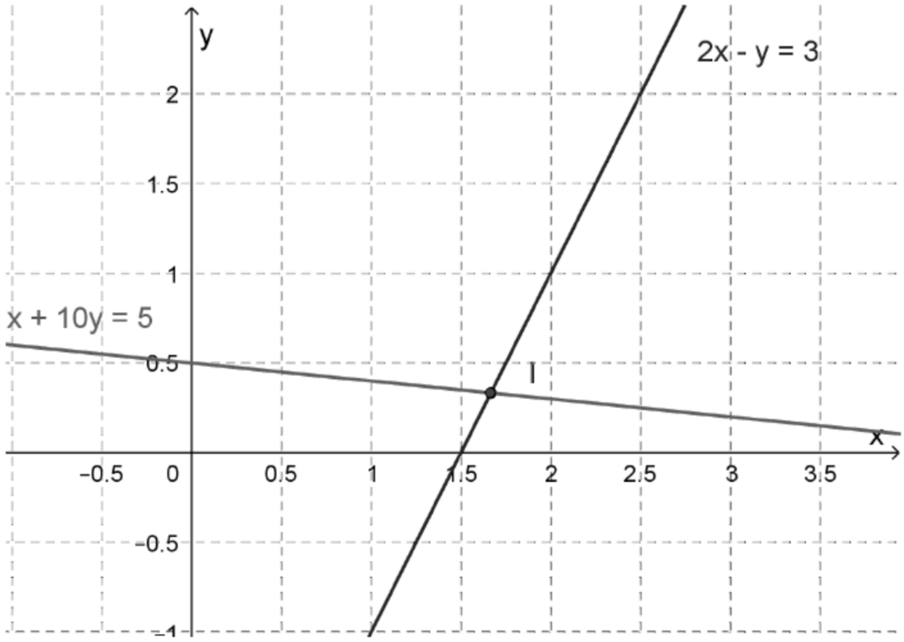
- Les deux droites sont sécantes en un point A de coordonnées (a, b) .Ce couple est donc la solution du système : S :$\{(a, b)\}$;
- Les deux droites sont parallèles distinctes et n'ont donc pas d'intersection. Le système n'admet pas de solution. On dit qu'il est impossible : S :ϕ ou S :$\{\}$;
- Les deux droites sont confondues et ont donc une infinité de points communs. Tous les couples, qui sont les coordonnées des points de ces droites, sont solutions du système. On dit qu'il est indéterminé : S :$\{(k, mk + p)\}$.

Soit à résoudre le système :

$$\boxed{S = \left\{ \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 10y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{array} \right.$$

On peut établir le graphique de ces deux droites. Ils sont repris ci-dessous :



On observe que les coordonnées du point I sont (approximativement) $I(1,66;0,33)$.